



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií

NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

RNDr. Gabriela Tarjániová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021:
Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

© Gabriela Tarjániová, Tomáš Mizera, 2023

ISBN 978-80-554-2044-8

OBSAH

| | |
|--|-----------|
| PREDHOVOR | 5 |
| POKYNY K PRÍPRAVE, REALIZOVANIU A SPRACOVANIU MERANIA | 6 |
| SPRACOVANIE MERANIA | 9 |
| A. Meranie a metóda merania..... | 9 |
| B. Chyby merania..... | 11 |
| C. Neistoty merania | 14 |
| D. Zásady pre zápis a zaokrúhľovanie nameraných veličín, neistôt a chýb | 20 |
| E. Zápis výsledku..... | 22 |
| F. Porovnanie dvoch meraní | 23 |
| MERANIE A JEHO NEISTOTA | 25 |
| A. Určenie reakčného času na základe vizuálneho stimulu | 25 |
| B. Určenie objemu valca | 28 |
| ŠTÚDIUM POHYBU GULÔČKY NA NAKLONENEJ A VODOROVNEJ ROVINE | 30 |
| A. Overiť, či pohyb guľôčky po prechode z naklonenej roviny na vodorovnú rovinu je rovnomerný priamočiary..... | 36 |
| B. Overiť, či pohyb guľôčky po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený..... | 37 |
| URČENIE KOEFICIENTU STATICKÉHO A DYNAMICKÉHO TRENIA | 39 |
| A. Určenie koeficientu statického trenia | 42 |
| B. Určenie koeficientu dynamického trenia | 44 |
| C. Overiť závislosť trecej sily od obsahu dotykovej plochy..... | 45 |
| URČENIE KOEFICIENTU DYNAMICKEJ VISKOZITY TELIESKOVÝMI VISKOZIMETRAMI | 47 |
| A. Meranie času pádu telesa v kvapaline v simulovanom experimente | 50 |
| B. Určenie koeficientu dynamickej viskozity Stokesovým viskozimetrom | 51 |
| MATEMATICKÉ KYVADLO | 57 |
| A. Meranie tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom..... | 61 |
| B. Určenie hmotnosti Zeme pomocou matematického kyvadla | 63 |
| URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA | 64 |
| A. Meranie periódy fyzikálneho kyvadla v simulovanom experimente | 66 |
| B. Určenie periódy fyzikálneho kyvadla pomocou postupnej metódy pre tri osi otáčania a vyjadrenie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania | 67 |
| C. Odvodenie vzťahu pre moment zotrvačnosti..... | 71 |
| URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM | 77 |
| A. Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia v mieste fyzikálneho laboratória | 81 |
| URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI TORZNÝM KYVADLOM | 85 |

| | |
|--|------------|
| A. Experimentálne určenie hodnoty momentu zotrvačnosti neznámeho telesa..... | 90 |
| SKÚMANIE VLASTNOSTÍ PRUŽNEJ DEFORMÁCIE | 93 |
| A. Určenie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče | 94 |
| B. Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou | 102 |
| C. Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou s použitím torzného kyvadla | 107 |
| SKÚMANIE KMITOV VIAZANÝCH OSCILÁTOROV | 112 |
| A. Určenie základnej frekvencie kyvadiel a sústavy kyvadiel s elastickou väzbou a koeficientu väzby..... | 119 |
| SKÚMANIE STOJATÉHO VLNENIA NA STRUNE..... | 124 |
| A. Odmerať základnú a vyššie rezonančné frekvencie pre rôzne hodnoty napínacej sily a porovnať ich s hodnotami vyplývajúcimi z teórie..... | 130 |
| KALORIMETRICKÉ MERANIA..... | 134 |
| A. Určenie tepelnej kapacity kalorimetra | 136 |
| B. Určenie hmotnostnej tepelnej kapacity tuhých látok | 139 |
| C. Experimentálne určenie hmotnostného skupenského tepla varu kvapaliny | 141 |
| MERANIE POISSONOVEJ KONŠTANTY | 145 |
| A. Určenie Poissonovej konštanty vzduchu Clémentovou-Desormesovou metódou | 149 |
| PRÍLOHY | 154 |
| ZOZNAM POUŽITEJ A ODPORÚČANEJ LITERATÚRY | 164 |

PREDHOVOR

Vysokoškolské skriptá *Návody k laboratórnym cvičeniam 1* sú určené hlavne študentom a učiteľom ako doporučená literatúra k predmetu Mechanika pre študijný odbor Elektrooptika. Môžu byť vhodnou literatúrou aj k predmetom Fyzika, Základy fyziky, Vybrané kapitoly z fyziky, ako súčasť štúdia na vybraných fakultách a študijných odboroch Žilinskej univerzity v Žiline. Obsahuje 13 tém, z ktorých sa vybrané témy môžu precvičovať vo vyššie uvedených predmetoch jednotlivých fakúlt Žilinskej univerzity.

Laboratórne cvičenia ako súčasť vyučovania majú za úlohu študentom pomôcť hlbšie sa oboznámiť so základnými fyzikálnymi zákonmi, získať pri nich elementárne návyky experimentovania a vychovávať ich k samostatnej práci. Študent by mal byť pri každom poznávaní aktívny a bolo by vhodné učiť ho tak, aby podstatnú časť svojich poznatkov, ktoré si osvojil, vedel produktívne využiť. Súčasťou laboratórných cvičení je aj spracovanie teoretických a experimentálnych poznatkov a experimentálnych dát vo forme referátu z laboratórnej úlohy. Tvorba referátu má za úlohu naučiť a pripraviť študentov na spracovanie spomenutých poznatkov vo forme vedeckého článku, ako primárneho zdroja vedeckých informácií, ktorý ostatným vedcom a odborníkom sprístupňuje nové myšlienky, pozorovania a experimenty.

V jednotlivých kapitolách sú k dispozícii návody na fyzikálne experimenty zamerané na javy, ktoré študenti poznávajú v mechanike, v termike a molekulovej fyzike. Návody k jednotlivým experimentom sa zvyčajne začínajú úlohami a teoretickým úvodom k danej problematike skúmaných fyzikálnych javov. Teoretický úvod sme spracovali tak, aby obsahoval dôležité fyzikálne zákony a princípy potrebné k pochopeniu problematiky potrebnej k predmetu merania. Snažili sme sa to vysvetliť čo najzrozumiteľnejšie, a preto sme niekde používali zjednodušené predpoklady. Pri každom experimente je uvedený zoznam pomôcok, postup na prípravu a realizáciu experimentu. Súčasťou je aj návrh tabuliek a postup vyhodnotenia a spracovania experimentálne získaných výsledkov. Každá úloha je spracovaná ako samostatný celok, takže nebolo nutné úplne dodržať jednotné označenie fyzikálnych veličín v celom študijnom materiály.

Skriptá vznikli z potreby inovácie niektorých laboratórných úloh, ktoré boli súčasťou doteraz používaných skrípt a nadväzujú, rozširujú a dopĺňujú texty, ktoré už boli publikované. Pri tvorbe sme reagovali aj na potreby vyplývajúce zo zmien v obsahu vzdelávania.

Považujeme za milú povinnosť poďakovať členom katedry, najmä prof. Mgr. I. Martinčekovi, PhD., prof. RNDr. J. Kúdelčíkovi, PhD., doc. Ing. N. Tarjányimu, PhD., doc. RNDr. I. Melovi, PhD., Mgr. M. Janekovi, PhD., RNDr. M. Gintnerovi, PhD., ktorí prispievali v predchádzajúcich rokoch k zostaveniu tohto študijného materiálu či už napísaním textov potrebných pre študentov k laboratórnemu cvičeniu, nápadom, ale aj cennými radami a pripomienkami pomohli vylepšiť obsah tohto študijného materiálu. Ďakujeme Tereze Tarjányiovej za jazykovú korektúru textu.

Autori

POKYNY K PRÍPRAVE, REALIZOVANIU A SPRACOVANIU MERANIA

Vyučujúci študentov pred meraním v laboratóriu oboznámi s aktuálnymi bezpečnostnými predpismi určenými na prácu v danom laboratóriu.

K príprave merania patria všetky pracovné úkony, ktoré netvoria samotné meranie, ale pripravujú a zaisťujú meranie tak, aby bolo možné získať čo najpresnejšie výsledky. Experimentátor musí byť podrobne oboznámený so všetkými úkonmi merania, ktoré bude realizovať a mal by dobre ovládať problematiku témy, ktorej sa meranie týka, vedieť fyzikálne zákony, princípy a definície. To znamená, že študenti sa musia v prípravnej etape merania danej laboratórnej úlohy teoreticky pripraviť na meranie. K teoretickej príprave slúžia návody k meraniu, ktoré sú obsahom týchto skrípt.

Každý študent si pred príchodom na prvú z hodín vymedzených na meranie danej laboratórnej úlohy naštuduje návod k príslušnej laboratórnej úlohe. Bude mať vopred pripravený referát, ktorý bude obsahovať vytlačenú a vyplnenú hlavičku referátu k úlohe, cieľ merania, teoretický úvod a bude mať vopred pripravené tabuľky na zaznamenávanie nameraných údajov.

Referát môže byť pripravený v textovom editore alebo napísaný ručne, podľa pokynov vyučujúceho. Tabuľky budú pripravené v tabuľkovom procesore na počítači (Excel, QtiPlot, Origin...), čiže študenti budú používať na meranie elektronickú podobu tabuliek. V úvodnej časti hodiny bude každý študent krátko preskúšaný ústne alebo písomne s dôrazom na definície najdôležitejších veličín a postup merania. Príprava na hodinu je hodnotená 20 % z celkového hodnotenia laboratórnej úlohy, 80 % hodnotenia danej úlohy je za vypracovaný referát. Študent napíše referát po domeraní laboratórnej úlohy a odovzdá ho najneskôr do začiatku merania ďalšej laboratórnej úlohy.

Štruktúra a hodnotenie referátu

O vykonanom meraní sa predkladá písomná správa (referát). Účelom referátu je ukázať, že študent porozumel problematike, naučil sa vypracovať správu z merania, ktorou dokáže oboznámiť nezúčastneného záujemcu s problematikou, prezentovať výsledky merania a ich spracovanie. Na základe spracovania výsledkov preukáže schopnosť prijímať závery o metodike merania, kvalite merania, kvalite použitej literatúry, a pod.). Dobrý referát obsahuje maximum informácií na minimálnom priestore. Informácie je možné efektívne prezentovať len vtedy, ak referát sleduje istý logický poriadok a zároveň sa ľahko číta. Je to náročná úloha a preto neočakávame, že študenti dokážu napísať niečo, čo bude hneď spĺňať profesionálne štandardy kladené na technické články, ale chceme, aby vykročili správnym smerom.

Referát by mal obsahovať nasledujúce časti:

1. **Hlavička** je prvá strana referátu spoločná pre všetkých študentov, ktorá obsahuje predmet, názov fakulty, názov úlohy, meno a priezvisko študenta, číslo študijnej skupiny, dátum merania a odovzdania laboratórnej úlohy.
2. **Cieľ merania** rozvíja jednou alebo dvoma vetami názov úlohy, aby bolo jasnejšie, ktoré konkrétne ciele sme pri meraní sledovali.
3. **Teoretický úvod** by mal odrážať chápanie textu študentom vo forme výberu toho podstatného, za čo najširšieho použitia vlastných formulácií. Mal by byť stručný, výstižný, mali by z neho vyplynúť vzťahy dôležité pre vyhodnotenie, mal by obsahovať definície, fyzikálne zákony. Teoretický úvod k úlohe nesmie byť bezhlavo kopírovaný z návodu k úlohe. Cieľ merania a teoretický úvod by nemali spolu zabrať viac ako jednu stranu referátu.
4. **Experimentálna časť**
 - a) **Nákres, schéma** zariadenia alebo zostavy experimentálneho zariadenia doplnená popisom.
 - b) **Zoznam pomôcok a prístrojov** vo forme krátkeho zoznamu, ktorý zahŕňa aparatúru, pomôcky a použité meracie prístroje. Pri meracích prístrojoch uvedieme do zátvorky najmenší dielik, napr. mikrometrické meradlo (0,01 mm), posuvné meradlo (0,05 mm).
 - c) **Postup merania** by mal byť stručný, výstižný a napísaný v minulom čase, t. j. po domeraní úlohy a mal by obsahovať popis toho, čo naozaj študenti robili.
 - d) **Namerané hodnoty** sú prezentované zvyčajne vo forme **tabuľky**, alebo iného vhodného zápisu, prípadne ako **graf**. Každá tabuľka má mať svoje poradové číslo, názov a jasne identifikované veličiny spolu s jednotkami.
 - e) **Výpočty** sú v referáte uvádzané v úplnom znení, aby sa dala skontrolovať ich správnosť, taktiež môžu byť prezentované vo forme **tabuľky**. Triviálne kroky môžu byť vynechané. Opakujúce sa výpočty figurujú v referáte len jedenkrát ako **vzorový výpočet** pre vyznačený riadok tabuľky. Priebežné výsledky merania v referáte uvádzame s neistotami zaokrúhlenými na dve platné číslice v tvare *fyzikálna veličina = aritmetický priemer ± neistota*, napr. $x \pm \sigma_x = (0,2317 \pm 0,0048)$ m. Meraná veličina musí mať rovnaký počet desatinných miest ako neistota (viac v kapitole Spracovanie merania). Výpočet neistoty v referáte nasleduje hneď po výpočte príslušnej veličiny. Do časti výpočty patria aj **grafy**. Tak ako tabuľky, aj grafy musia mať svoje poradové číslo a názov. Na súradnicových osiach musia byť identifikované veličiny spolu s jednotkami. Namerané hodnoty v grafe by mali mať zakreslené aj chyby/neurčitosti merania, v prípade, že si to úloha vyžaduje.

5. **Výsledky** prezentujú najdôležitejšie číselné výsledky merania a vyhodnotenia taktiež v tvare *fyzikálna veličina = aritmetický priemer ± neistota*, napr. $x \pm \sigma_x = (0,232 \pm 0,005) \text{ m}$, kde x je stredná hodnota meranej veličiny a σ_x jej neurčitost'/chyba. Všimnite si, že neurčitost'/chybu v tejto časti treba zaokrúhliť na prvú platnú číslicu a meraná veličina má rovnaký počet desatinných miest ako zaokrúhlená neurčitost'/chyba (viac v kapitole Spracovanie merania).
6. **Záver merania** je vo forme diskusie o dosiahnutých výsledkoch, o zhode nameraných výsledkov s teoretickou alebo tabuľkovou hodnotou, o možných príčinách nesúhlasu, ktoré ovplyvnili výsledok, o veličine, ktorá sa najviac podieľa na výslednej neistote atď. V závere sa ďalej diskutuje o kvalite vykonanej práce, zhodnotí sa použitá meracia metóda (rozoberú sa jej pozitíva ale aj jej prípadné nedostatky, odporúčenie použitia inej metódy, navrhne sa spôsob akým by sa dali nedostatky odstrániť).

SPRACOVANIE MERANIA

Tak ako je samo o sebe staré meranie, tak je stará aj pochybnosť, či je nameraná hodnota presná. V tejto kapitole bude našou snahou Vám priblížiť a čiastočne vysvetliť komplikovaný proces merania a vyhodnocovania nameraných údajov.

Na úvod je potrebné, aby sme si jednotlivé veličiny rozdelili do kategórii. Pre toto rozdelenie využijeme jednoduchý príklad jazdy vlaku z jedného miesta na druhé.

Prvým typom sú **statické veličiny**, sú to také, ktoré sa v čase nemenia a sú konštantné. Ak zoberieme do úvahy vlak, jedná sa o hmotnosť vlaku, rozmery vlaku, vzdialenosť medzi miestami, kde sa vlak presúva a tak ďalej.

Druhým typom sú **veličiny krátkodobo statické**. Do tejto kategórie môžeme zaradiť veličiny, ktoré sú z krátkodobého hľadiska konštantné. Ak by sme ich hľadali na spomínanom vlaku, išlo by napríklad o množstvo paliva v nádrži, vonkajšia teplota, barometrický tlak, atď.

Poslednou skupinou sú **dynamické (časovo premenlivé) veličiny**. Typickým príkladom je napr. rýchlosť vlaku, otáčky motora, stúpanie trate. Túto kategóriu by sme mohli deliť na základe rôznych kategórii na ďalšie podskupiny.

Poznanie o aký typ veličiny sa jedná je prvým a dôležitým krokom k jeho správne spracovaniu a vyhodnoteniu.

A. Meranie a metóda merania

V experimentálnej činnosti, kvalitnej výrobe alebo v technickom rozvoji zohráva meranie dôležitú úlohu. **Meranie** je súbor činností, ktorých cieľom je stanoviť hodnotu neznámej fyzikálnej veličiny. Pod týmto pojmom rozumieme všetky potrebné úkony na určenie fyzikálnej veličiny. Vo všeobecnosti sem patrí príprava a kontrola meradla, prípadná inštalácia snímača, nastavenie a kalibrácia a samotné získanie a spracovanie údajov. Nie je možné očakávať, že výsledkom merania bude skutočná hodnota. Dôležité je, ako blízko je získaný výsledok k tejto skutočnej hodnote, čo závisí od metódy merania, kvality aparatury určenej na meranie, kvality realizovaného merania a iných vplyvov. Za daných podmienok predpokladáme, že získané výsledky sa pohybujú v okolí hľadanej hodnoty meranej veličiny a sú ovplyvnené chybami merania.

Metóda merania nám vyjadruje, akým spôsobom danú veličinu získame. Každú meranú veličinu dokážeme odmerať viacerými metódami. Výber metódy ovplyvňuje o aký typ meranej veličiny ide, aké máme podmienky a čo máme k dispozícii. V praxi sa najčastejšie využívajú štyri metódy merania.

Metóda jednorazového a opakovaného merania

Ako už vyplýva zo samotného názvu, ak hľadanú veličinu odmeriame meracím prístrojom raz, hovoríme o jednorazovom meraní. Táto metóda merania je najmenej presná.

Ak by sme chceli túto presnosť zvýšiť, bolo by potrebné vykonať viac meraní. Týmto spôsobom by sme získali súbor nameraných hodnôt x_1, x_2, \dots, x_n , kde n je počet meraní. Túto metódu logicky nazývame opakované meranie. Z praktického hľadiska, je viac než potrebné súbor nameraných hodnôt získaných touto metódou charakterizovať jednou jedinou hodnotou. Túto hodnotu budeme nazývať **stredná hodnota**. Strednú hodnotu týchto meraní je najlepšie charakterizovať aritmetickým priemerom nameraných hodnôt

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Pri tomto type metódy merania existuje aj špeciálny prípad, tzv. **metóda postupných meraní**. V tomto prípade je začiatok každého nasledujúceho merania totožný s koncom toho predchádzajúceho.

Priame a nepriame metódy

Ak hodnotu meranej veličiny odčítame zo stupnice meracieho prístroja priamo, hovoríme o **priamom meraní**. Napríklad pri meraní dĺžky pomocou dĺžkového meradla alebo priemeru pomocou mikrometrického meradla.

Ak je potrebné hľadanú veličinu určiť pomocou matematického vzťahu alebo je funkciou niekoľkých veličín rôzneho druhu, t. j. $x = f(y_1, \dots, y_n)$, hovoríme o **nepriamej metóde**.

Absolútne a relatívne metódy

Absolútne metódy poskytujú priamo číselnú hodnotu meranej veličiny. V prípade relatívnych metód ide o podiel dvoch veličín toho istého druhu, pričom hodnota jednej z porovnávaných veličín musí byť známa.

Statické a dynamické metódy

Ak meraná veličina a aj ostatné veličiny, s ktorými meraná veličina súvisí, majú v čase konštantné hodnoty, ide o statickú metódu. Pri dynamickej metóde sa niektorá z veličín mení s časom.

Pri meraniach sa častokrát používajú viaceré metódy súčasne. Typickým príkladom je prípad opakovaného nepriameho merania. V tomto prípade pri spracovaní hodnôt musíme brať do úvahy, že meraná veličina závisí od viacerých veličín y_i , ktoré sú merané niekoľkokrát. Preto v prvom kroku určíme strednú hodnotu každej veličiny podľa vzťahu (1) a až potom určíme hľadanú veličinu. Z toho vyplýva, že hľadaná veličina bude určená strednými hodnotami $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. S podobným typom spájania metód sa stretne napr. pri úlohe s názvom Určenia objemu valčeka.

B. Chyby merania

Úlohou merania je určiť hodnotu meranej veličiny a odhadnúť chybu merania a neistotu, ktorej sa dopúšťame pri meraní. Rozdiel medzi nameranou a skutočnou (tzv. pravou) hodnotou meranej veličiny nazývame **chyba merania**.

Pojem skutočná hodnota je ideálny pojem, ktorý vyjadruje hodnotu, ktorá je v zhode s definíciou bližšie určenej veličiny. Jedná sa o jednočíselnú hodnotu u spojitých veličín s veľkým počtom desatinných miest, ktorú by sme získali veľmi presným meraním pri vysokých požiadavkách na technickú vyspelosť meradiel, spôsobilosť osoby a dobu merania. Takáto hodnota je pre praktické využitie nepoužiteľná, preto sa zavádza pojem **konvenčne pravá hodnota (stredná hodnota)**. Táto hodnota predstavuje hodnotu dostatočne blízku ku skutočnej hodnote. Získame ju za primeraných technických, finančných, časových a personálnych podmienok. Za konvenčne pravú hodnotu môžeme pokladať tabuľkovú hodnotu, strednú hodnotu meranej veličiny alebo hodnotu meranej veličiny určenú z definície. Tento ústupok má za následok zníženie presnosti a navýšenie chyby a neistoty merania.

Zdrojom chýb v rámci merania je viacero. Na základe pôvodu chyby ich môžeme rozdeliť na tri kategórie.

Hrubé chyby

Prvú skupinu tvoria hrubé chyby, ktorých výskyt je predovšetkým systémovým zlyhaním a vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- sú nápadné svojou veľkosťou (napr. merací prístroj ukazuje neobvykle veľkú alebo malú hodnotu, alebo jedna hodnota sa výrazne líši od ostatných)
- môžu byť doplnené ďalšími negatívnymi ukazovateľmi
- vyžadujú zásadný zásah do procesu merania (ukončenia merania, oprava meradla, výmena experimentátora,...).

Možné príčiny hrubých chýb merania:

- zlé odčítanie nameraných hodnôt experimentátorom
- poškodené meradlo alebo snímač
- zle nastavené meradlo
- nevhodné meradlo
- nepripravenosť experimentátora
- nevhodná metóda
- nevhodné podmienky merania.

Výskyt hrubých chýb sa najčastejšie prejavuje pri opakovanom meraní. V súbore hodnôt hodnotu, ktorá je zaťažená hrubou chybou pri spracovaní neberieme do úvahy, alebo je potrebné odstrániť chybu a meranie zopakovať.

Systematické chyby

Systematické chyby, na rozdiel od hrubých chýb, namerané hodnoty posúvajú od výslednej hodnoty vždy rovnakým smerom, a preto sú ťažko odhaliteľné.

Vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- majú poznateľnú príčinu (vieme priamo určiť konkrétny zdroj chyby)
- sú stále, čo do veľkosti a orientácie (znamienka)
- existuje jednoznačné riešenie
- nedá sa ich charakterizovať na základe opakovaného merania

Možné príčiny systematických chýb:

- zlá kalibrácia alebo začiatočné nastavenie
- chyba paralaxy (vzniká u analógových meracích prístrojov v prípade, kedy rovina pohybu ručičky a rovina stupnice sú od seba vzdialené a stupnica nie je pozorovaná v kolmom smere)
- nevhodne upevnený snímač
- poškodenie vedenia
- znečistený merací dotyk.

Aj pri veľmi dobrej analýze príčin systematických chýb sa určitá časť neodhalí. Tieto chyby potom spadajú pod kategóriu náhodných chýb.

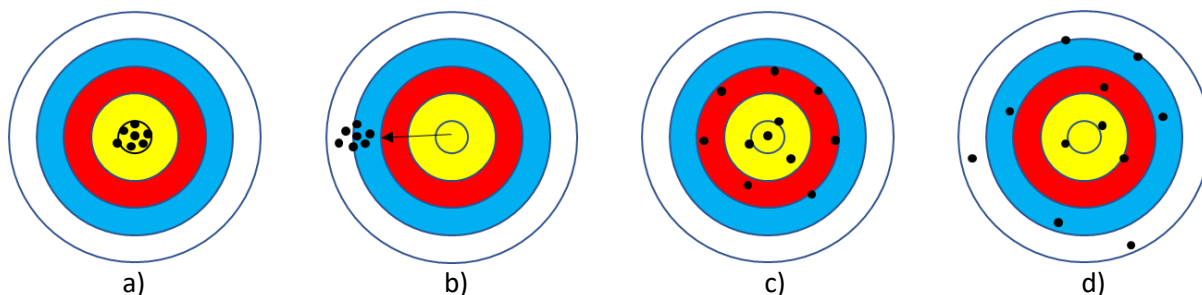
Náhodné chyby

Čo nevieme zaradiť do predchádzajúcich chýb logicky spadá do tejto kategórie. Jedná sa o chyby spôsobené náhodnými vplyvmi prostredia alebo prebiehajúcimi dejmi v prístrojoch. Pri týchto chybách nevieme predpokladať kedy nastanú.

Vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- nevieme ich identifikovať z hľadiska konkrétnych príčin
- nevieme ich presne vyčíslieť
- sú nestále z hľadiska veľkosti aj orientácie
- neexistuje proces spracovania iba štatisticky (opakovaným meraním).

Pre lepšie pochopenie jednotlivých typov chýb si predstavme tieto chyby ako strely na terč. Obrázok (Obr. 1.a) zobrazuje ideálny stav, keď všetky strely zasiahli stred terča, ich rozptyl je malý a sú blízko pri sebe. Takýto stav v rámci merania je veľmi ťažké, resp. nemožné dosiahnuť. Obrázok (Obr. 1.b) zobrazuje systematické chyby. Vidíme, že rozptyl jednotlivých zásahov ostáva malý, ale každá jedna strela je posunutá do jedného smeru. Z tohto pohľadu vidíme, že systém je ovplyvňovaný systematickým vonkajším vplyvom a každá hodnota je systematicky posunutá rovnakým smerom. Obrázok (Obr. 1.c) zobrazuje náhodné chyby, kde vidíme, že strely majú veľký rozptyl a každá sa od ideálneho stavu líši, či už do veľkosti odchýlky alebo smeru.



Obr. 1. Názorná ukážka jednotlivých typov chýb: a) ukážka ideálneho stavu, b) systematické chyby, c) náhodné chyby, d) reálne namerané hodnoty

Život by bol oveľa jednoduchší keby existujú iba tieto uzavreté prípady, ale v reálnom procese merania tieto diskkrétne stavy neexistujú. V prípade reálneho merania (Obr. 1.d) vidíme, že strely sú náhodné a ovplyvnené systematickými, náhodnými a hrubými chybami. Úlohou experimentátora je následne odhaliť možné chyby a určenými postupmi charakterizovať dané merania a súbor nameraných dát.

V rámci experimentálnej práce a vyhodnocovania sa experimentátor častokrát stretáva s pojmami absolútna a relatívna chyba. Tento typ chýb sa najčastejšie používa na porovnávanie dvoch hodnôt.

Absolútna chyba

Absolútna chyba Δx predstavuje rozdiel medzi výsledkom merania x_i a konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny x_p

$$\Delta x = x_i - x_p. \quad (2)$$

Jednotka absolútnej chyby je rovnaká ako jednotka meranej veličiny. Táto chyba môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Relatívna chyba

Relatívna chyba predstavuje podiel medzi absolútnou hodnotou absolútnej chyby a konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny x_p

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{x_p}. \quad (3)$$

Ak relatívnu chybu δx vyjadríme v percentách, platí vzťah

$$\delta x_{\%} = \frac{|\Delta x|}{x_p} 100 \%. \quad (4)$$

Hodnota relatívnej chyby je vždy kladná a je vyjadrená ako bezrozmerné číslo alebo v percentách.

C. Neistoty merania

V predchádzajúcich častiach sme častokrát spomenuli, že jednotlivé chyby sa nedajú presne číselne vyjadriť. Ich hodnotu vieme určiť iba ako približné číslo, ktoré nevytvára dostatočne dobre o meraní. Aby sme získali skutočnú predstavu o výslednej hodnote merania, musíme túto hodnotu vyjadriť ako interval, v ktorom sa s určitou pravdepodobnosťou bude nachádzať meraná veličina. Tento interval určíme pomocou matematickej štatistiky a teórie pravdepodobnosti. Jedná sa o neistotu merania. **Neistota merania** je parameter charakterizujúci interval hodnôt meranej veličiny okolo výsledku merania, ktorý s určitou pravdepodobnosťou obsahuje skutočnú hodnotu. Pri neistote merania je potrebné si uvedomiť tri kľúčové vlastnosti:

- neistota je pridružená k výsledku merania, a teda neistota je parametrom, ktorý sám o seba nemá veľký význam
- neistota je v podstate rozptyl hodnôt, čím sa neistote dáva štatistická podoba
- pri neistote vzniká povinnosť určiť a zdôrazniť zdroje neistôt a ich príspevky k celkovej neistote.

Neistota merania sa stáva kvalitatívnym ukazovateľom výsledku a do istej miery vyjadruje aj kvalitu merania. Základnou charakteristikou neistoty je štandardná neistota σ , ktorú vieme určiť z matematickej štatistiky pre náhodné procesy. Častokrát sa pri analýzach meraní využívajú absolútna štandardná neistota, ale aj relatívna štandardná neistota.

Matematickým vyjadrením závislosti na metóde merania je **absolútna štandardná neistota** σ_x meranej veličiny x . Vyjadrená býva v rovnakých jednotkách ako meraná veličina.

Vzhľadom na komplikovanosť meraní v praxi (použitie viacerých meradiel alebo typov metód merania) určenie absolútnej štandardnej neistoty má presne definované postupy a zákonitosti.

Najčastejšie používanou absolútnou štandardnou neistotou je tzv. kombinovaná štandardná neistota. Tento typ neistoty v sebe spája štandardnú neistotu typu A a štandardnú neistotu typu B.

Štandardná neistota typu A

Túto neistotu môžeme použiť len v prípade, že máme k dispozícii (alebo sme schopní vykonať) opakované merania. Pre výpočet štandardnej neistoty typu A je potrebné poznať výberovú smerodajnú odchýlku jedného merania s pre ktorú platí

$$s = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}, \quad (5)$$

kde n je počet meraní a Δx_i je absolútna chyba zadaná vo vzťahu (2).

Výberovú smerodajnú odchýlku môžeme zo štatistického hľadiska použiť na posúdenie presnosti jednotlivých meraní. Všeobecne platí, že čím je s menšie, tým je meranie presnejšie. V literatúre sa výberová smerodajná odchýlka jedného merania označuje aj ako stredná kvadratická odchýlka jedného merania.

Takýmto spôsobom sme schopný určiť presnosť (rozptyl) jedného merania. Avšak, ak uskutočníme n opakovaných meraní niekoľkokrát za sebou, dostaneme pre každú z týchto n -tíc nameraných hodnôt všeobecne rozdielnu skutočnú hodnotu. Ak sú výsledky jednotlivých meraní navzájom nezávislé, potom smerodajná odchýlka $\sigma_{\bar{x}}$ aritmetického priemeru určeného z n opakovaných meraní je \sqrt{n} -krát menšia ako smerodajná odchýlka jedného merania s . Pre štandardnú neistotu typu A v určitých podmienkach potom platí $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{A\bar{x}}$ a môžeme napísať

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{A\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (6)$$

kde n predstavuje počet meraní, x_i výsledok i -teho merania a výraz $(x_i - \bar{x})$ predstavuje absolútnu chybu ako je uvedené vo vzťahu (2).

Zo vzťahu (6) je zrejmé, že $\sigma_{A\bar{x}}$ bude tým menšie čím:

- bude menší rozptyl opakovaných meraných hodnôt
- bude viac opakovaní meraní n .

Pri určovaní štandardnej neistoty typu A sa všeobecne odporúča:

- aby počet meraní nebol menší ako 5
- aby sa počet meraní 5 až 10 využíval len vo výnimočných prípadoch
- aby počet meraní bol 10 a viac.

Štandardná neistota typu B

Štandardná neistota typu B, vyjadruje neistoty spôsobené najčastejšie zdrojmi, ktoré sa vyznačujú nasledujúcimi vlastnosťami:

- určujú sa nestatickými metódami
- ich množstvo závisí na rozhodnutí experimentátora
- ich vplyv sa nedá znížiť opakovanými meraniami.

V praxi sa najčastejšie ako zdroje neistoty typu B vyskytujú:

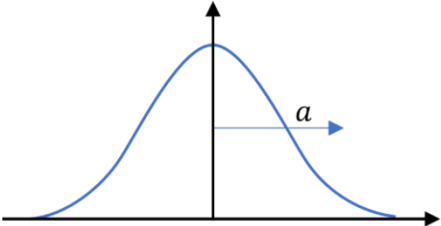
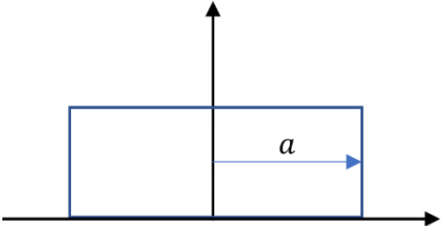
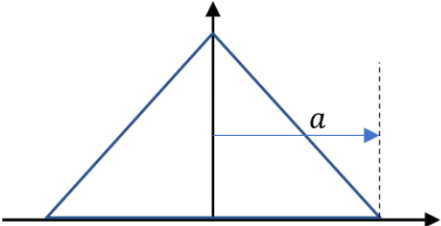
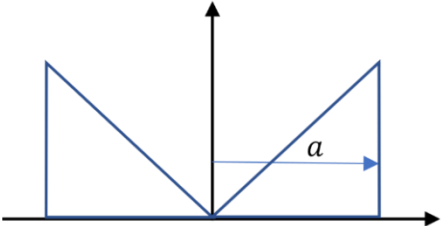
- vplyv poveternostných podmienok
- vplyv kalibrácie
- vplyv meracích káblov
- vplyv uloženia snímačov
- vplyv rozlíšiteľnosti meradla
- vplyv konštánt pri výpočte nepriamo meraných veličín.

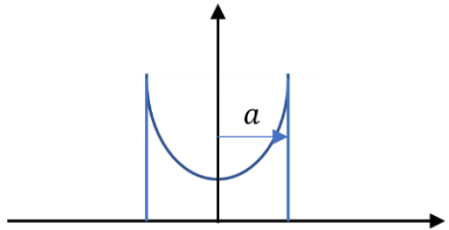
Pre samotný výpočet štandardnej neistoty typu B je potrebné do istej miery poznať typ rozdelenia pravdepodobnosti. Následne štandardnú neistotu typu B $\sigma_{B\bar{x}}$ vieme vypočítať pomocou zjednodušeného vzťahu

$$\sigma_{B\bar{x}} = \frac{z_{\max}}{\chi}, \quad (7)$$

kde z_{\max} predstavuje maximálnu dovolenú odchýlku meracieho zariadenia a χ je koeficient na popis statického rozdelenia. Základné hodnoty koeficientu χ pre výpočet štandardnej neistoty typu B sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1.

| Statické rozdelenie | z_{\max} | χ |
|--|---|-------------------------|
| Normálne (Gaussovo)  | $a = 2s$ $a = 3s$ $a = hs$ s - smerodajná odchýlka rozdelenia | 2 3 h |
| Rovnomerné (Pravouhlé)  | a | $\sqrt{3} \approx 1,73$ |
| Trojuholníkové (Simpsonovo)  | a | $\sqrt{6} \approx 2,45$ |
| Trojuholníkové (Bimodálne)  | a | $\sqrt{2} \approx 1,41$ |

| | | |
|---|-----|-------------------------|
| <p>U – rozdelenie</p>  | a | $\sqrt{2} \approx 1,41$ |
|---|-----|-------------------------|

V prípade nesymetrického rozdelenia by sme uvažovali dlhšiu vzdialenosť od zdroja neistoty ku krajnej hodnote. Výpočet by sa veľmi skomplikoval a nemohli by sme použiť vzťah (7). Tieto prípady sú však veľmi ojedinelé a v praxi sa preferuje hlavne symetrické rozdelenie.

Štandardná neistota nepriameho merania

Nepriame meranie je z hľadiska spracovania nameraných hodnôt najnáročnejšie. Zatiaľ čo v prípade priamych meraní hodnoty získavame priamo meraním, v prípade nepriameho merania je táto meraná veličina funkciou viacerých premenných rôzneho druhu (t. j. od viacerých fyzikálnych veličín). Tieto premenné (fyzikálne veličiny) môžeme merať jednorazovo alebo opakovaným meraním. Hodnota meranej veličiny x sa v prípade opakovaného merania určuje nepriamo pomocou jednotlivých stredných hodnôt meraných veličín $x = f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_n)$. V prípade, ak veličiny meriame jedenkrát je meraná veličina x funkciou veličín rôzneho druhu $x = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Pre určenie tejto neistoty v prípade nepriameho merania musíme využiť nasledovný vzťah

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2}, \quad (8)$$

kde $\frac{\partial x}{\partial y_i}$ je parciálna derivácia veličiny x podľa y_i a platí $\frac{\partial x}{\partial y_i} = \frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_i)}{\partial y_i}$, σ_{y_i} je v prípade jednorazového merania štandardná neistota typu B a v prípade opakovaného merania σ_{y_i} predstavuje štandardnú neistotu typu A alebo kombinovanú štandardnú neistotu. Zároveň zo vzťahu (8) vyplýva, že na určenie štandardnej neistoty nepriameho merania je potrebné určiť parciálne derivácie meranej veličiny x , podľa každej premennej y_i , od ktorej meraná veličina závisí. V prípade ak $x = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ je potrebné vykonať n parciálnych derivácií a vzťah (8) môžeme zapísať aj v tvare

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial y_n}\right)^2 \sigma_{y_n}^2}. \quad (9)$$

Maximálna dovolená odchýlka

Maximálna dovolená odchýlka najčastejšie predstavuje presnosť meradla a jej určenie vo veľkej miere závisí od použitej metódy merania a samotného meradla. Pri najčastejšie sa vyskytujúcich meracích prístrojoch (výnimku tvoria len ručičkové) je maximálna dovolená odchýlka daná najmenším dielikom stupnice.

Pri ručičkových (analogových) prístrojoch sa za maximálnu dovolenú odchýlku považuje trieda presnosti p najčastejšie uvedená v %. Potom pre maximálnu dovolenú odchýlku meracieho zariadenia platí

$$z_{\max} = \frac{p}{100} \cdot \text{rozsah.} \quad (10)$$

Samozrejmosťou je aj výpočet maximálnej odchýlky v prípade nepriamych meraní. V tomto prípade sa maximálna dovolená odchýlka vypočíta nasledovne

$$z_{\max} = \left| \frac{\partial x}{\partial y_1} \right| y_{1\max} + \left| \frac{\partial x}{\partial y_2} \right| y_{2\max} + \dots + \left| \frac{\partial x}{\partial y_n} \right| y_{n\max}, \quad (11)$$

kde $\frac{\partial x}{\partial y_1}$ predstavuje parciálnu deriváciu veličiny x , kde $x = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Kombinovaná štandardná neistota

Keď vieme stanoviť štandardnú neistotu typu A a štandardnú neistotu typu B môžeme stanoviť štandardnú kombinovanú neistotu nasledujúcim vzťahom

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{A\bar{x}}^2 + \sigma_{B\bar{x}}^2}. \quad (12)$$

Zo vzťahu vyplýva, že zápis je iba formálnym spojením časti A a časti B. Je dôležité si uvedomiť, že zdroj neistôt typu A má rovnaký význam ako zdroj neistôt typu B. Význam vzťahu (12) spočíva hlavne v uvedení si spojenia dvoch metód určenia štandardných neistôt a tiež ich porovnaní. Ak

- $\sigma_{A\bar{x}}$ je výrazne (rádovo) väčšie ako $\sigma_{B\bar{x}}$, môžeme predpokladať, že v systéme merania prevažujú náhodne chyby a mali by sme sa zamerať na ich odstránenie,
- $\sigma_{B\bar{x}}$ je výrazne (rádovo) väčšie ako $\sigma_{A\bar{x}}$ môžeme predpokladať, že je systém merania nesprávne navrhnutý alebo sú v systéme dominantné zdroje typu B.

Relatívna štandardná neistota merania

Podiel príslušnej absolútnej štandardnej neistoty a meranej veličiny označujeme ako relatívna štandardná neistota $\sigma_{R\bar{x}}$ a matematicky ju môžeme vyjadriť vzťahom

$$\sigma_{R\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{x} 100 \%. \quad (13)$$

Rozšírená neistota

Na úvod k neistotám merania sme si povedali, že aby sme získali skutočnú predstavu o výslednej hodnote merania musíme túto hodnotu vyjadriť ako interval, v ktorom sa s určitou pravdepodobnosťou bude nachádzať meraná veličina. Podľa štatistickej teórie je hodnota tejto pravdepodobnosti rovná 68,3 % za predpokladu, že sa jedná o symetrické rozloženie. Interval $x = (\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}})$ nám teda vyjadruje, že v tomto intervale sa okolo strednej hodnoty \bar{x} nachádza 68,3 % všetkých meraní. Ďalej môžeme povedať, že s pravdepodobnosťou 68,3 % ďalšia nameraná hodnota spadne do tohto intervalu.

Z praktickej stránky takýto úzky interval často nemá zmysel, a preto sa zavádzajú intervaly so širším pokrytím. Tieto neistoty sa nazývajú rozšírené neistoty. Rozšírená neistota je daná ako súčin kombinovanej neistoty a faktora rozšírenia (pokrytia) k a platí

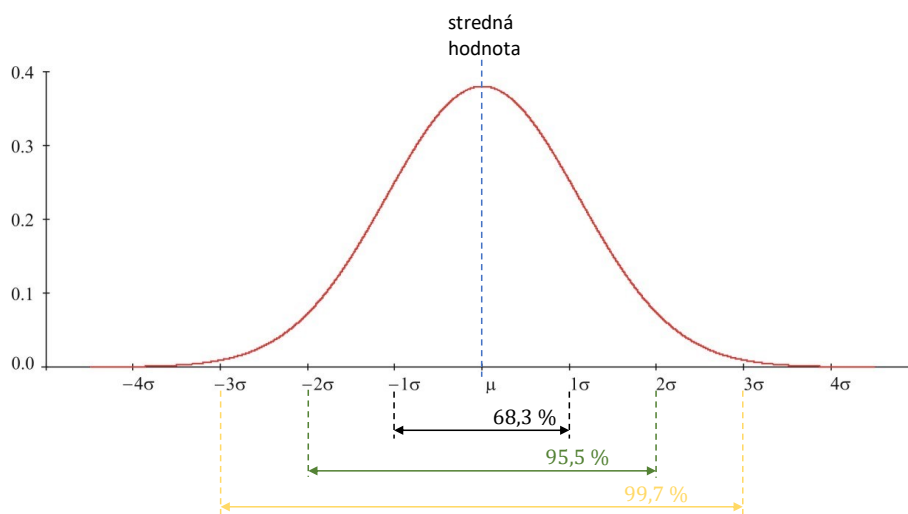
$$U_{\bar{x}} = k \cdot \sigma_{\bar{x}}. \quad (14)$$

Hodnota faktora pokrytia sa volí na základe požadovanej pravdepodobnosti, pričom platí

Tabuľka 2.

| k | pravdepodobnosť |
|-----|-----------------|
| 1 | 68,3 % |
| 2 | 95,5 % |
| 3 | 99,7 % |

Pre lepšiu predstavu uvedieme príklad: Pri opakovom meraní pre $n = 10$ vyjadruje absolútna štandardná neistota $\sigma_{\bar{x}}$, že 68,3 % všetkých meraní, čo je v tomto prípade 6 meraní, sa bude nachádzať v intervale $(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}})$ okolo strednej hodnoty. Ak použijeme rozšírenú neistotu $U_{\bar{x}}$ s faktorom rozšírenia $k = 2$, potom zväčšíme počet odmeraných hodnôt, ktoré budú ležať v intervale $(\bar{x} \pm U_{\bar{x}}) = (\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}})$ okolo strednej hodnoty na deväť hodnôt.



Obr. 2. Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti

V prípade najčastejšie sa vyskytujúceho normálneho rozloženia, tzv. Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti, môžeme rozšírené neistoty zakresliť aj graficky (Obr. 2), kde vidíme, že približne 99,7 % spadá do intervalu $(\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}})$. Podľa dohovoru všetky hodnoty, ktoré spadajú mimo tento interval môžeme považovať za nepresné a môžeme ich z merania vylúčiť.

D. Zásady pre zápis a zaokrúhľovanie nameraných veličín, neistôt a chýb

Pri procese merania nie je dôležité len meranie a spracovanie výsledkov, ale dôležitou súčasťou merania je aj zápis nameraných výsledkov. Tento výsledok musí byť zapísaný správne a má mať fyzikálny význam. Ako bolo uvedené vyššie v texte, neistota je pridružená k výsledku merania, preto zápis výsledku každého merania obsahuje strednú hodnotu meranej veličiny a príslušnú neistotu merania. Hodnota nameranej veličiny ako aj príslušná neistota musia byť správne zaokrúhlené a zapísané podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie meranej veličiny.

Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie chyby a neistoty

1. Pri zaokrúhľovaní chyby alebo neistoty má význam iba prvá nenulová číslica (platná číslica). Jedinou výnimkou je zaokrúhľovanie v čiastkových výpočtoch, kedy je dovolené zaokrúhľovanie na prvé dve platné číslice. Dôvod pre používanie jednej (dvoch) platnej číslice je ten, že chyby, ktoré budeme určovať v laboratóriu, nikdy neurčíme presnejšie ako na jednu platnú číslicu. Dve platné číslice vo výpočtoch používame kvôli tomu, aby nám zaokrúhľované chyby počas výpočtov nezväčšili finálnu chybu.

Napríklad:

Pri meraní dĺžky má štandardná neistota hodnotu 7 484 mm. Prvá platná číslica je 7 (7 484 mm), prvé dve platné číslice sú 74 (7 484 mm).

Pri meraní prúdu má štandardná neistota hodnotu 0,02301 A. Prvá platná číslica je 2 (0,2301 A), prvé dve platné číslice sú 23 (0,2301 A).

2. Pri zaokrúhľovaní chýb a neistôt vždy zaokrúhľujeme smerom nahor, okrem prípadu, kedy je za platnou číslicou 0. Zaokrúhľovaním smerom nadol by dochádzalo k umelému a štatisticky nesprávnemu zužovaniu intervalu pravdepodobnosti. Zužovanie intervalu pravdepodobnosti zaokrúhľovaním neistoty smerom nadol nemá praktický význam, nakoľko ide o vynútené zvyšovanie presnosti nameraných hodnôt.

Napríklad:

a) Pri meraní dĺžky má štandardná neistota hodnotu 7 484 mm.

Prvá platná číslica je 7 (7 484 mm) za ňou nasleduje 4, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 8000 mm.

Prvé dve platné číslice sú 74 (7 484 mm) za nimi nasleduje 8, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 7 500 mm.

b) Pri meraní prúdu má štandardná neistota hodnotu 0,02301 A.

Prvá platná číslica je 2 (0,02301 A) za ňou nasleduje 3, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 0,03 A.

Prvé dve platné číslice sú 23 (0,02301 A) za nimi nasleduje 0, a teda hodnotu zaokrúhlime nadol a zaokrúhlená hodnota má tvar 0,023 A.

Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie nameranej veličiny

1. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme na rovnaký počet desatinných miest ako je určená neistota. V prvom kroku zaokrúhlime neistotu a v ďalšom kroku podľa počtu platných desatinných miest neistoty zaokrúhlime nameranú veličinu na rovnaký počet platných desatinných miest.

Napríklad:

Pri meraní reakčného času sme získali hodnotu reakčného času $t = 0,16430$ s prislúchajúca neistota má hodnotu $\sigma_{\bar{t}} = 0,004284$ s. Ak neistotu zaokrúhlime na tri desatinné miesta $\sigma_{\bar{t}} = 0,004$ s, potom aj hodnotu meranej veličiny $t = 0,16430$ s zaokrúhlime na tri desatinné miesta $t = 0,164$ s.

2. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme nasledovne: ak číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú chceme zaokrúhľovať, nameranej veličiny je

- a) od 1 po 4 – zaokrúhľujeme nadol

Napríklad:

Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17359 cm³ a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (v tomto prípade za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 3. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,17 cm³.

- b) od 6 po 9 - zaokrúhľujeme nahor

Napríklad:

Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17759 cm³ a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (v tomto prípade za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 7. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,18 cm³.

- c) 5 - zaokrúhľujeme nadol, ak je pred ňou párne číslo

Napríklad:

Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,18559 cm³ a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5 a pred ňou je párne číslo 8. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,18 cm³.

d) 5 - nahor, ak je pred ňou nepárne číslo

Napríklad:

Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17559 cm³ a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5 a pred ňou je nepárne číslo 7. Preto nameraný objem zaokrúhľime nahor na 7,18 cm³.

E. Zápis výsledku

Pri zápise výsledku merania sa číselné hodnoty veličiny a absolútnej štandardnej neistoty (rozšírenej neistoty) udávajú v okrúhlych zátvorkách a rovnaká značka ich jednotiek sa umiestňuje za zátvorkou:

úplný údaj výsledku merania = (hodnota meranej veličiny ± neistota merania) jednotky

Pričom pri zápise výsledku dôrazne dbáme na to, aby hodnota meranej veličiny a neistota mali rovnaký počet desatinných miest a boli správne zaokrúhlené v zmysle vyššie uvedených pravidiel. Pri určovaní počtu desatinných miest je potrebné si uvedomiť význam číslice 0, ktorá sa započítava do tohto počtu. V prípade situácie, kedy by nameraná hodnota mala po zaokrúhlení alebo nameraní len jedno desatinne miesto a určená neistota by mala tri v zmysle pravidla o rovnakom počte výsledkov, musíme zapísať v tvare $m = (40,500 \pm 0,003)$ kg. Napríklad pre určenie objemu valčeka budú výsledky zapísane v nasledujúcom tvare.

$$h = (\bar{h} \pm \sigma_{\bar{h}}) = (23,94 \pm 0,02) \text{ mm}$$

$$d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}}) = (14,729 \pm 0,003) \text{ mm}$$

$$V = (\bar{V} \pm \sigma_{\bar{V}}) = (4079 \pm 4) \text{ mm}^3$$

Najčastejšie chyby pri zápise výsledku

1. Nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty.

Príklad chybného zápisu výsledku: $m = (40,5 \pm 0,003)$ kg

2. Nie je rovnaký rád desiatok nameranej veličiny a neistoty.

Príklad chybného zápisu výsledku: $l = (5,1 \cdot 10^{-2} \pm 2,3 \cdot 10^{-3})$ m

3. Je rovnaký rád desiatok, ale nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty.

Príklad chybného zápisu výsledku: $I = (6,12 \cdot 10^{-2} \pm 0,2 \cdot 10^{-2})$ A

4. Nie sú zaokrúhlené hodnoty meranej veličiny a neistoty.

Príklad chybného zápisu výsledku: $t = (2,3585 \pm 0,02408905)$ s

Hodnoty relatívnej štandardnej neistoty, absolútnej a relatívnej chyby sa zapisujú samostatne bez číselnej hodnoty meranej veličiny, zaokrúhlené podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie.

F. Porovnanie dvoch meraní

Ak sme urobili aspoň dve merania tej istej fyzikálnej veličiny, môžeme zistiť, ako sa tieto merania zhodujú. Výsledky merania máme uvedené vo výslednom tvare

$$\begin{aligned} X_1 \pm \sigma_{X_1}, \\ X_2 \pm \sigma_{X_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

kde X_1, X_2 sú stredné hodnoty nameraných veličín a $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ sú k nim prislúchajúce neistoty merania. To, či tieto dva výsledky súhlasia, zistíme podľa toho, či sa prekrývajú intervaly definované neistotami.

V prvom kroku vypočítame rozdiel Δ stredných hodnôt merania

$$\Delta = X_2 - X_1. \quad (16)$$

V druhom kroku vypočítame prislúchajúcu neistotu

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2}. \quad (17)$$

V treťom kroku vypočítame pomer

$$R = \left| \frac{\Delta}{\sigma_{\Delta}} \right|. \quad (18)$$

V prípade, že chceme meranie porovnať s teoretickou alebo tzv. tabuľkovou hodnotou pri ktorej nie je známa neurčitnosť σ_{X_2} (neistota teoretickej alebo tabuľkovej hodnoty). Pomer R v takomto prípade vypočítame veľmi podobne, pričom $\sigma_{X_2} = 0$ a bude teda platiť

$$R = \left| \frac{\Delta}{\sigma_{\Delta}} \right| = \left| \frac{\Delta}{\sigma_{X_1}} \right|. \quad (19)$$

Ak sa obidve merania zhodujú je $R = 0$. V dôsledku neistôt merania takáto situácia nastáva len veľmi zriedka. Z teórie štatistiky vieme, že pravdepodobnosť, že pri správnom meraní tej istej strednej hodnoty sa budú dve hodnoty v dôsledku náhodných chýb od seba odlišovať o $\Delta = \sigma_{\Delta}$ čo je približne 33 % a tomu zodpovedá pomer $R = 1$. Pravdepodobnosť, že sa budú merania odlišovať až o $\Delta = 2\sigma_{\Delta}$, t. j. $R = 2$ je približne 4 %. Pravdepodobnosť, že by sa odlišovali až o $\Delta = 3\sigma_{\Delta}$, t. j. $R = 3$ je približne 0,3 %. Z toho vyplýva, že čím väčší bude rozdiel medzi dvoma meraniami tej istej veličiny, tým menej budeme týmto meraniam dôverovať. Rozhodnutie, aký veľký rozdiel nameraných hodnôt sa bude považovať ešte za akceptovateľný, je subjektívne a závisí na experimentátorovi. Všeobecne sa však považujú dve namerané hodnoty tej istej veličiny za konzistentné (rovné), pokiaľ pomer $R \leq 2$.

Vážený priemer

Pri meraní sa stretávame s rôznymi prípadmi, keď urobíme viac meraní tej istej fyzikálnej veličiny $X_1 \pm \sigma_{X_1}, X_2 \pm \sigma_{X_2}, \dots, X_n \pm \sigma_{X_n}$. Ak by boli neistoty merania rovnaké v každom z týchto meraní, bolo by možné vypočítať obyčajný priemer. Avšak často tieto neistoty nie sú rovnaké, preto obyčajný priemer nie je vhodný nástroj na výpočet. V takom prípade meranie s najmenšou chybou doň vstupuje s rovnakou váhou ako meranie s najväčšou chybou. Avšak meranie s najmenšou chybou by malo mať najväčšiu váhu, pretože je naj dôveryhodnejšie. Aby sme toto zohľadnili, definujeme tzv. vážený priemer, ktorý berie do úvahy veľkosti neistôt, t. j. ich váhu. Vážený priemer poskytuje charakteristiku vybraného štatistického súboru v prípade, že hodnoty v tomto súbore majú rôznu dôležitosť (váhu), t. j. majú rôznu neistotu merania. Na výpočet váženého priemeru potrebujeme stredné hodnoty nameraných veličín a k nim prislúchajúce neistoty.

Ak máme súbor hodnôt X_1, X_2, \dots, X_n a k nim odpovedajúce neistoty merania $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \dots, \sigma_{X_n}$ vypočítame vážený priemer nasledovne

$$\bar{X} = \frac{\frac{X_1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{X_2}{\sigma_{X_2}^2} + \dots + \frac{X_n}{\sigma_{X_n}^2}}{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_{X_n}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sigma_{X_i}^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{X_i}^2}} \quad (20)$$

a neistotu váženého priemeru vypočítame podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_{X_n}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{X_i}^2}}}. \quad (21)$$

Výsledok takéhoto vyhodnotenia potom nadobúda tvar

$$X = \bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}. \quad (22)$$

MERANIE A JEHO NEISTOTA

Úlohy

- A. Určenie reakčného času na základe vizuálneho stimulu
- B. Určenie objemu valca

A. Určenie reakčného času na základe vizuálneho stimulu

Teoretický úvod

Čas je jednou zo základných veličín v medzinárodnej sústave jednotiek SI. Jednotkou času je sekunda s . Čas je veličina, ktorá sa neustále mení a nedá sa spätne reprodukovať. **Reakčný čas** patrí do štruktúry pohybových schopností. Je to časový interval medzi fyzickým stimulom a uskutočnením požadovanej reakcie. Reakčný čas je pre väčšinu osôb menší ako 200 ms. Toto je však príliš krátky interval na to, aby bol spoľahlivo meraný stopkami, a navyše, celé meranie by sa skomplikovalo nutnosťou uvažovať aj s reakčným časom osoby, ktorá by čas merala.

Experimentátori často čelia problému, keď majú zmerať veličiny, ktorých hodnoty sú také malé, že sa pohybujú na hranici alebo pod hranicou presnosti akéhokoľvek dostupného meracieho zariadenia. Jediným z možných riešení je zvoliť vhodnú metódu merania.

V tomto experimente budeme určovať čas potrebný na zachytenie pravítka, ktoré bolo náhle uvoľnené z ruky druhej osoby, takže po uvoľnení sa pohybovalo voľným pádom. Časový interval od začiatku pádu do okamihu zachytenia pravítka bude považovaný za reakčný čas osoby chytajúcej pravítka. Na určenie reakčného času budú použité zákony mechaniky. Po uvoľnení pravítka uchopeného rukou sa pravítka vplyvom gravitácie pohybuje k zemi voľným pádom. Ide o rovnomerne zrýchlený pohyb so zrýchlením $g = 9,806 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Keďže začiatková rýchlosť pravítka je nulová, vzdialenosť, o ktorú klesne za časový interval t , je určená vzťahom

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Z tohto vzťahu medzi časom a dráhou pri rovnomerne zrýchlenom pohybe môžeme vypočítať dobu pádu pravítka, t. j. reakčný čas osoby chytajúcej pravítka

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \quad (2)$$

Ak je pravítka držané vo zvislej polohe a testovaný študent je pripravený zachytiť ho medzi palcom a ukazovákom, pričom palec je nastavený nad referenčnú polohu s' , potom je dráha voľného pádu pravítka

$$s = s'' - s', \quad (3)$$

kde s'' charakterizuje polohu palca po zachytení pravítka. Dobu voľného pádu pravítka potom vypočítame dosadením s do vzťahu (2).

Ostáva nám ešte zamyslieť sa, či táto metóda má potenciál dosiahnuť úroveň presnosti potrebnú na meranie takto krátkych časových intervalov. Väčšina z ľudí si nevie predstaviť časový interval na úrovni dvoch alebo troch desiatín sekundy. Ľudia sú zvyknutí vnímať časy na úrovni sekúnd, minút, hodín, atď. Na lepšie pochopenie, čo takýto krátky čas predstavuje, je možné tento čas previesť do jazyka vzdialenosti voľného pádu nášho pravítka. Predpokladáme, že málokteré pozorované časy budú kratšie ako 100 ms. Zo vzťahu (1) môžeme určiť, že tejto hodnote zodpovedá dráha rovná približne 5 cm. Ak dráhu s dokážeme stanoviť s chybou okolo 0,5 cm (10 %), dá sa očakávať neistota určenia času t na úrovni 5 %. To je preto, lebo pri propagácii neistoty druhá odmocnina redukuje neistotu na polovicu.

Pomôcky

Pravítko s dĺžkou 50 cm.

Postup merania

1. Každý študent uskutoční niekoľko skúšobných pokusov za účelom určenia čo najlepšej techniky postupu pri púšťaní a chytaní pravítka. Jeden študent drží pravítko a jeho partner je pripravený zachytiť ho čo najrýchlejšie po tom, čo bolo uvoľnené. Pravítko musí byť uvoľnené bez varovania.
2. Následne meranie opakujeme 50-krát. Odporúčame, aby sa študenti striedali minimálne po desiatich meraniach. Toto by malo pomôcť redukovať únavu chytajúceho a takisto znížiť pravdepodobnosť podvedomého osvojenia si náznakov, ktoré by chytajúcej osobe umožnili predvídať okamih vypustenia pravítka. Namerané hodnoty pozícií palca na pravítku s'_i, s''_i zaznamenávame do tabuľky 1 s presnosťou na najmenší dielik.

Tabuľka 1.

| i | s''_i (m) | s'_i (m) | s_i (m) | t_i (s) | $\Delta_i = (\bar{t} - t_i)$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{t} - t_i)^2$ (s ²) |
|---|-------------|------------|-----------|-------------------|----------------------------------|--|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| n | | | | | | |
| | | | | $\bar{t} = \dots$ | | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných začiatkových s_i' a konečných s_i'' pozícií palca na pravítke určíme zo vzťahu (3) dráhy voľného pádu s_i .
2. Z určených hodnôt dráh s_i vypočítame podľa vzťahu (2) k nim prislúchajúce reakčné časy voľného pádu t_i .
3. Vypočítané hodnoty časov znázorníme vo forme histogramu v tabuľkovom procesore.
4. Preskúmame zostrojený histogram a vylúčime z neho všetky hodnoty, ktoré sa javia nesprávne. Za nesprávne hodnoty môžu byť považované neprimerane krátke alebo dlhé časové intervaly. Výskyt takýchto hodnôt môže byť spôsobený tým, že v niektorých prípadoch chytajúci z náznakov uhádol moment vypustenia pravítka, alebo niečo mohlo rozptýliť pozornosť chytajúceho študenta.
5. Potom z vypočítaných časových intervalov t_i vypočítame priemernú hodnotu \bar{t} . Vypočítaný priemer zakreslíme do histogramu.
6. Vypočítame výberovú smerodajnú odchýlku jedného merania času pomocou vzťahu

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum(\bar{t} - t_i)^2}{n - 1}}.$$

Zakreslíme interval $(\bar{t} - \sigma_t, \bar{t} + \sigma_t)$ do histogramu a skontrolujeme, či približne 68,4 % hodnôt patrí do tohto intervalu.

7. Vypočítame strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru pomocou vzťahu

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{t} - t_i)^2}{n(n - 1)}}.$$

8. Výsledok merania uvádzame vo výslednom tvare $t = (\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}})$.

B. Určenie objemu valca

Teoretický úvod

Objem je veľkosť priestoru, ktorý vyplňa, alebo zaberá nejaké teleso. Matematicky je objem miera charakterizujúca časť priestoru. Fyzikálnu veličinu objem označujeme V a jej jednotka v medzinárodnej sústave jednotiek SI je meter kubický m^3 . Jednotka objemu liter l ($1l = 1 \text{ dm}^3$) je vedľajšou jednotkou a jej používanie je medzinárodne povolené.

Objem kvapaliny alebo pevnej látky je možné určiť priamo pomocou odmerného valca, čo je plastová alebo sklenená dutá nádoba s mierkou. Nepriamo sa objem telesa určuje pomocou veličín, od ktorých táto fyzikálna veličina závisí, t. j. určuje sa výpočtom zo známych hodnôt rozmerov telesa. Objem valca V môžeme určiť meraním jeho priemeru d (polomeru r) a výšky h pomocou vzťahu

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h. \quad (4)$$

Nepriame meranie bolo použité aj v prípade určenia reakčného času, ktorý závisel len od jednej priamo meranej veličiny, úloha po A. Ak však meraná fyzikálna veličina závisí od viacerých priamo meraných veličín, ako je to v prípade určenia objemu, pri určovaní jej neistoty, tzv. neistota nepriameho merania, postupujeme nasledovne. V prípade valca priamo zmeriame jeho priemer a výšku a určíme stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{h}}, \sigma_{\bar{d}}$. Výslednú neistotu objemu určíme pomocou vzťahu

$$\sigma_{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{d}}\right)^2 (\sigma_{\bar{d}})^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{h}}\right)^2 (\sigma_{\bar{h}})^2}. \quad (5)$$

Po dosadení platí

$$\sigma_{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{\pi \bar{d} \bar{h}}{2}\right)^2 (\sigma_{\bar{d}})^2 + \left(\frac{\pi \bar{d}^2}{4}\right)^2 (\sigma_{\bar{h}})^2} = \bar{V} \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{d}}\right)^2 (\sigma_{\bar{d}})^2 + \left(\frac{1}{\bar{h}}\right)^2 (\sigma_{\bar{h}})^2}, \quad (6)$$

kde \bar{V} je najpravdepodobnejší objem valca vypočítaný z priemerných hodnôt priemeru \bar{d} a výšky \bar{h} . Tento vzťah (6) nám umožňuje zistiť, ktorá z priamo meraných veličín (priemer alebo výška) sa podieľa na výslednej neistote určenia objemu viac. Rozhoduje o tom to, ktorý z dvoch členov pod odmocninou vo vzťahu (6) je väčší. Z toho vieme usúdiť, ktorú z priamo meraných veličín (priemer alebo výšku) máme predovšetkým merať presnejšie, ak potrebujeme zmenšiť nepresnosť určenia objemu valca.

Pomôcky

Teleso pravidelného valcovitého tvaru, mikrometrické meradlo, posuvné meradlo.

Postup merania

1. Vybraným typom meradla uskutočníme 10 meraní výšky valca h a druhým typom meradla 10 meraní priemeru valca d .
2. Hodnoty výšok h_i a priemerov valca d_i zaznamenávame do tabuliek 2 a 3.

Tabuľka 2.

| i | h_i (m) | $\Delta_i = (\bar{h} - h_i)$ (m) | $\Delta_i^2 = (\bar{h} - h_i)^2$ (m ²) |
|-----|-------------------|----------------------------------|--|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| ⋮ | | | |
| n | | | |
| | $\bar{h} = \dots$ | | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Tabuľka 3.

| i | d_i (m) | $\Delta_i = (\bar{d} - d_i)$ (m) | $\Delta_i^2 = (\bar{d} - d_i)^2$ (m ²) |
|-----|-------------------|----------------------------------|--|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| ⋮ | | | |
| n | | | |
| | $\bar{d} = \dots$ | | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných hodnôt výšky h_i a priemeru valca d_i vypočítame aritmetické priemery \bar{h} , \bar{d} a k nim prislúchajúce stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{h}}$, $\sigma_{\bar{d}}$.
2. Vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu objemu valca \bar{V} podľa vzťahu (4), pričom za hodnoty výšky a priemeru valca dosadzujeme aritmetické priemery jednotlivých rozmerov \bar{h} , \bar{d} .
3. K vypočítanému objemu \bar{V} stanovíme prislúchajúcu neistotu objemu $\sigma_{\bar{V}}$ pomocou vzťahu (6).
4. Výsledky uvádzame vo výslednom tvare

$$h = (\bar{h} \pm \sigma_{\bar{h}}), d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}}), V = (\bar{V} \pm \sigma_{\bar{V}}).$$

ŠTÚDIUM POHYBU GULÔČKY NA NAKLONENEJ A VODOROVNEJ ROVINE

Úlohy

- A. Overiť, či je pohyb guľôčky po prechode z naklonenej roviny na vodorovnú rovinu rovnomerný priamočiary
- B. Overiť, či pohyb guľôčky po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený

Teoretický úvod

V laboratórnej úlohe sa budeme venovať pohybu telesa (hmotného bodu). Pre správny opis tohto deja je potrebné si zadať základné charakteristické veličiny. Postupnosť polôh pohybujúceho sa hmotného bodu vzhľadom na zvolený vzťažný bod v priestore sa nazýva **trajektória**. Trajektória je teda geometrická čiara, ktorú hmotný bod pri pohybe opisuje. Podľa tvaru trajektórie sa rozdeľujú pohyby na priamočiare a krivočiare. Ak sa všetky body pohybujúceho sa telesa posúvajú v rovnakých časových intervaloch v tom istom smere o rovnakú vzdialenosť, t. j. všetky body sa pohybujú rovnakými rýchlosťami, tak teleso koná rovnomerný posuvný (translačný) pohyb.

Vzdialenosť, ktorú hmotný bod prejde za určitú dobu, meraná pozdĺž trajektórie, sa nazýva **dráha**. Dráhu označujeme s , jednotkou dráhy je meter (m). Priemerná rýchlosť je rýchlosť, ktorou by teleso prešlo tú istú dráhu za rovnaký čas ako keby sa pohybovalo po tejto dráhe rovnomerne. V praxi sa zavádza pojem priemerná rýchlosť, pretože pohyb telies je často nerovnomerný. Veľkosť priemernej rýchlosti je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1)$$

kde Δs je dráha, ktorú hmotný bod prešiel za časový interval Δt . Jednotka rýchlosti je meter za sekundu ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). **Okamžitá rýchlosť** je vektorová fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje rýchlosť telesa v danom mieste a v danom okamihu, a má vždy smer dotyčnice ku trajektórii. Zmena polohového vektora $\Delta \mathbf{r}$, ku ktorej dochádza pri pohybe hmotného bodu za čas Δt , je určená rozdielom polohových vektorov $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (Obr. 1). Vektor a veľkosť vektora okamžitej rýchlosti sú definované vzťahmi

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2)$$
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

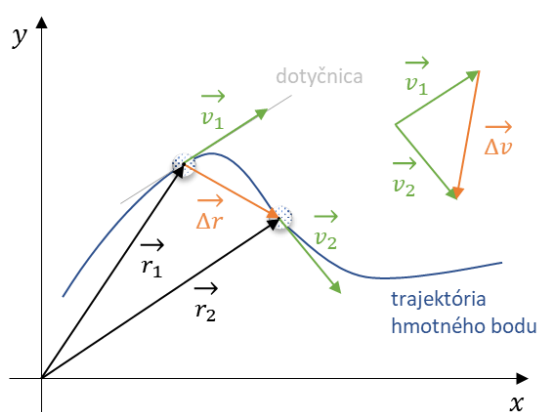
kde $\Delta \mathbf{r}$ je zmena polohového vektora.

Ak hmotný bod za rovnaké časové intervaly Δt prejde po vodorovnej rovine rovnaké dráhy Δs , koná **rovnomerný priamočiary pohyb**, $v = \text{konšt.}$, $v = \text{konšt.}$. Ak mal hmotný bod v čase t_0 prejdenu dráhu s_0 a za čas t prejde dráhu s , pre veľkosť rýchlosti platí

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3)$$

Ak v čase $t_0 = 0$ s je $s_0 = 0$ m, pre veľkosť rýchlosti platí $v = \frac{s}{t}$ a pre dráhu $s = vt$. Ak v čase $t_0 = 0$ s je s_0 dĺžka dráhy, ktorú hmotný bod prešiel, potom pre dráhu platí

$$s = s_0 + vt. \quad (4)$$



Obr. 1. Znáozornenie zmeny polohového vektora a zmeny vektora rýchlosti

Ak sa rýchlosť mení v čase rovnomerne, ide o **pohyb rovnomerne zrýchlený** alebo **spomalený**. Pri pohybe hmotného bodu po trajektórii má hmotný bod v čase t_0 rýchlosť v_0 , v čase t rýchlosť v a zmena vektora rýchlosti $\Delta v = v - v_0$ za časový interval $\Delta t = t - t_0$ vyjadruje vektor priemerného zrýchlenia (Obr. 1). Jednotka zrýchlenia je meter za sekundu na druhú ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). Veľkosť priemerného zrýchlenia vyjadruje zmenu rýchlosti Δv za časový interval Δt , za ktorý táto zmena nastala. Vektor a veľkosť vektora okamžitého zrýchlenia sú definované vzťahmi

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad |\mathbf{a}| = a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}. \quad (5)$$

Zmena rýchlosti Δv (zväčšenie alebo zmenšenie rýchlosti) za časový interval Δt je určená súčinom zrýchlenia a časovej zmeny $\Delta v = a\Delta t$. Ak sa hmotný bod pohyboval už na začiatku merania času (t. j. $t_0 = 0$ s) začiatočnou rýchlosťou $v_0 \neq 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, konečná rýchlosť v čase t bude vyjadrená vzťahom

$$v = v_0 \pm at, \quad (6)$$

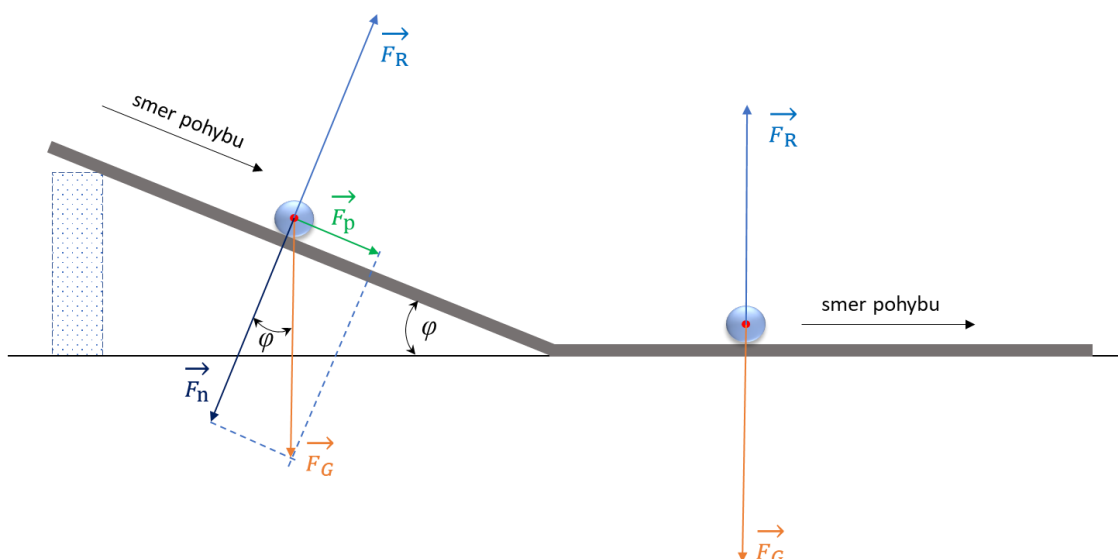
kde znamienko plus platí v prípade zrýchleného pohybu a znamienko mínus v prípade spomaleného. Ak hmotný bod do začiatku merania času prešiel dráhu s_0 a má v čase $t_0 = 0$ s

nenulovú začiatočnú rýchlosť $v_0 \neq 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, potom pre celkovú dráhu, ktorú hmotný bod prešiel do okamihu vyjadrenom časom t platí vzťah

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2. \quad (7)$$

V prípade priamočiareho pohybu hmotného bodu je smer vektora zrýchlenia totožný so smerom pohybu hmotného bodu a zrýchlenie má buď rovnaký smer ako rýchlosť (pohyb zrýchlený) alebo má opačný smer ako rýchlosť (pohyb spomalený).

Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona výsledná sila $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ktorá určuje pohybový stav guľôčky, je v prípade pohybu po naklonenej rovine určená vektorovým súčtom síl, čiže $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G$ (\mathbf{F}_G je tiažová sila a podľa zákona akcie a reakcie na guľôčku pôsobí reakcia podložky \mathbf{F}_R). Ak pri pohybe guľôčky po naklonenej rovine zanedbáme treciu silu a odpor prostredia, je príčinou pohybu guľôčky pohybová zložka \mathbf{F}_p tiažovej sily \mathbf{F}_G (Obr. 2) a platí $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_G = \mathbf{F}_p$.



Obr. 2. Grafické znázornenie pohybu guľôčky po naklonenej a vodorovnej rovine

Z obrázku je zrejmé, že veľkosť pohybovej zložky vektora tiažovej sily možno vyjadriť ako

$$F_p = F_G \sin(\varphi). \quad (8)$$

Po dosadení za veľkosti síl dostávame

$$ma = mg \sin(\varphi), \quad (9)$$

z čoho po matematickej úprave pre veľkosť zrýchlenia platí

$$a = g \sin(\varphi). \quad (10)$$

Vidíme, že zrýchlenie guľôčky je konštantné, t. j. guľôčka sa pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom a závisí od uhla naklonenej roviny.

Pri pohybe guľôčky po vodorovnej rovine je možné taktiež zanedbať treciu silu a odpor prostredia, a potom považovať pohyb guľôčky za rovnomerný priamočiary. Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona výsledná sila $F = m\mathbf{a}$ určuje pohybový stav guľôčky a v prípade pohybu po vodorovnej rovine je výslednica síl určená $F = F_R + F_G$ (Obr. 2). Z tretieho Newtonovho pohybového zákona vyplýva, že sily F_R a F_G sú rovnako veľké $F_R = F_G$, opačne orientované, a teda pre veľkosť výslednej sily platí $F = 0$ N. Zrýchlenie \mathbf{a} pohybu guľôčky je nulové, t. j. rýchlosť je konštantná a guľôčka sa pohybuje rovnomerne priamočiario.

Historická poznámka

Možno, že si niektorí z vás, ktorí čítate tieto návody položíte otázku, prečo sa máme zaoberať takým banálnym pohybom, akým je pohyb guľôčky po naklonenej rovine? Je to síce banálny pohyb, ale jeho štúdium prispelo k formulácii základných poznatkov vysvetľujúcich správanie sa pohybujúcich telies. A tieto poznatky práve štúdiom spomínaného pohybu objavil taliansky učenec Galileo Galilei (1564-1642), ktorý urobil veľa objavov v oblasti mechaniky, optiky, astronómie i techniky.

V mechanike Galilei definoval pojmy rýchlosti a zrýchlenia, zaoberal sa skladaním pohybov a pri štúdiu voľného pádu uvažoval o zotrvačnosti telies. Spomedzi jeho objavov v oblasti mechaniky spomeňme aspoň tri, ktoré ilustrujú o čom uvažoval, k čomu dospel a ako experimentoval.

Prvý objav. Galilei v roku 1632 pri štúdiu pohybov v pohybujúcich sa sústavách napísal „Ak je pohyb lode rovnomerný, nepozorujú sa najmenšie zmeny pohybov prebiehajúcich na lodi a ani z jedného z nich sa nedokáže určiť, či je loď v pohybe alebo či stojí na mieste. Ak skočíte smerom k zadnej časti lode, na podlahe prejdete rovnakú vzdialenosť, ako keby loď stála, to znamená, že neurobíte dlhšie skoky, aj keď sa loď pohybuje veľmi rýchlo, smerom k zadnej časti lode, hoci počas doby, keď ste vo vzduchu, sa podlaha pod vami pohybuje smerom opačným. Kvapky z džbánu s vodou, ktorý je zavesený na strope, budú padať zvisle na podlahu a ani jedna z nich nepadne smerom k zadnej časti lode, hoci zatiaľ, čo je kvapka vo vzduchu sa loď pohybuje smerom dopredu.“

Tieto tvrdenia boli v rozpore s aristotelovskými filozofmi (Aristoteles, grécky filozof, 384 pr. n. l. – 322 pr. n. l.), ktorí tvrdili, že objekt padajúci zo sťažňa pohybujúcej sa lode spadne dozadu lode, lebo loď by sa pod ním vzdialila. To sa skutočne na prvý pohľad môže zdať aj z pokusov, ak by ste ich robili na otvorenej palube a s predmetmi, ktoré majú voči vzduchu dostatočný odpor. Ale keby ste vykonali experimenty starostlivo s uvažovaním všetkých možných vplyvov na vykonávaný pohyb, museli by ste dôjsť k záverom, ako Galilei.

Dnes sústave, ktorá je spojená s takouto loďou hovoríme, že je inerciálna a vďaka Einsteinovej teórii relativity vieme, že nielen žiadnym mechanickým pokusom, ale ani optickým, elektrickým, chemickým a žiadnym iným sa nedá zistiť, či je inerciálna sústava v pokoji, alebo sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom.

Druhý objav. Od aristotelových čias sa myslelo, že telesá s väčšou hmotnosťou padajú v gravitačnom poli Zeme rýchlejšie, ako telesá s menšou hmotnosťou. A väčšina ľudí si to myslí dodnes a čiastočne majú pravdu. Je to predsa samozrejmé. Keď pustíte z rovnakej výšky kladivo a pierko, kladivo spadne na zem skôr. A prečo? No zrejme preto, že má väčšiu hmotnosť. Ale Galilei tvrdil, že telesá s rozdielnou hmotnosťou padajú rovnako rýchlo. Galilei si na základe experimentov s padajúcimi telesami uvedomil, že aj v prípade kladiva a pierka o rýchlosti pádu nerozhoduje hmotnosť telesa, ale ich odpor, ktorý majú voči vzduchu. A preto v bezodporovom prostredí, akým je vákuum, budú všetky telesá padať rovnako bez ohľadu na ich hmotnosť. A tento fakt čiastočne platí aj pre vzduch. Môžete to vyskúšať. Ak si zoberiete rovnakú plnú a prázdnu PET fľašu a pustíte ich naraz zo zdvihnutých rúk, tak padnú na zem naraz, hoci ich hmotnosti sú značne rozdielne. Keby ste ich však púšťali napr. z ôsmeho poschodia na zem, ťažšia fľaša spadne skôr, lebo sa v pohybe telies začne prejavovať odporová sila vzduchu, ktorá vplýva na ich rýchlosť.

Okrem iného, to s tým kladivom a pierkom pred televíznou kamerou vyskúšal na Mesiaci, kde je vákuum, astronaut David Scott počas misie Apolla 15 v roku 1971. Popri náročných vedeckých experimentoch si astronauti našli čas aj na takýto pokus a vzniklo krátke inštruktážne experimentálne video pre stredné školy.

Tretí objav. A práve tretí objav súvisí so štúdiom pohybu guľôčky po naklonenej rovine, ktorému sa budete venovať aj v nasledujúcej laboratórnej úlohe a ktorému sa venoval aj Galilei.

V Galileiho časoch, keď už boli vyvinuté delá na pušný prach, ľudia mali záujem presne strieľať z jedného miesta na druhé. Aby ste toho boli schopný, potrebujete vedieť, ako sa telesá pohybujú v gravitačnom poli Zeme. Pri štúdiu pohybu padajúcich telies však Galilei narazil na experimentálny problém. Voľne padajúce telesá sa pohybovali veľmi rýchlo na to, aby v tých časoch dostupnými meracími zariadeniami času dokázal presne merať čas ich pádu. A preto sa Galilei rozhodol pád telies spomaliť tak, že začal valiace guľôčky púšťať po naklonenej rovine. Teraz mu na štúdium pohybu stačilo poznať dĺžku naklonenej roviny a časový interval, za ktorý guľôčky prejdú na nej vyznačenú dĺžku. Hoci bol časový interval pohybu dlhší, ako pri voľnom páde, stále ho potreboval čo najpresnejšie zmerať. Zo začiatku na meranie doby pohybujúcich sa telies používal svoj pulz, čo nebolo veľmi presné. Neskôr vymyslel zariadenie, ktoré popísal nasledovne „Použili sme veľkú nádobu s vodou a umiestnili sme ju do vyvýšenej polohy. Na dno nádoby sme pripevnili rúrku malého priemeru, cez ktorú tiekol tenký prúd vody. Vytečenú vodu sme zachytávali v malom pohári počas každého merania pádu guľôčky. Takto zozbieraná voda

sa po každom meraní odvážila na veľmi presnej váhe. Rozdiely a pomery hmotností vody v pohári nám dávali rozdiely a pomery v časoch.“

Keby to dnes Galilei napísal na vysokej škole povedali by sme, že píše referát z laboratórnej úlohy.

Ale čo zistil? Okrem iného zistil aj to, že ak po naklonenej rovine prešla guľôčka pustená z pokoja dráhu s za časovú jednotku t , tak za časovú jednotku $2t$ prešla po naklonenej rovine dráhu $4s$ a za časovú jednotku $3t$ dráhu $9s$. Galilei a jeho asistenti vykonali takéto merania opakovane mnoho krát a o ich výsledkoch napísal „Experimenty sme opakovali sto krát a vždy sme zistili, že prejdené vzdialenosti boli úmerné štvorcu časov a to platilo pre všetky sklony kanála, pozdĺž ktorého sme spúšťali guľôčku“.

Dnes by sme jeho záver symbolicky napísali $s \sim t^2$. A to bol dôležitý objav. Galilei totiž zistil, že pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe telesa sa prejdená dráha mení s druhou mocninou času a tento fakt bol objavený experimentálne. Neskôr sa zistilo, že konštantou úmernosti v predchádzajúcom vzťahu je polovica zrýchlenia a telesa a teda pre prejdenú dráhu platí vzťah $s = \frac{1}{2}at^2$. Čo vyplýva aj z rovnice (7). Tento výsledok bol neskôr aj jedným z potvrdení správnosti nového matematického postupu, ktorý sa vyvinul pri hľadaní výpočtu okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa telesa a celkovej prejdenej dráhy, tzv. infinitezimálneho počtu, v ktorom sa definujú pojmy derivácie a integrálu. Prejdená dráha pri rovnomerne zrýchlenom priamočiarom pohybe sa dá totiž vypočítať ako integrál z okamžitej rýchlosti. A dostaneme presne taký istý výsledok, ku ktorému došiel Galilei experimentálne. Takže Galileiov experiment napomohol aj dôkazu, že infinitezimálny počet správne matematicky popisuje prírodné zákony.

Zásadnú úlohu pri vytvorení infinitezimálneho počtu zohrali anglický učenec Isaac Newton (1643 – 1727) a nemecký učenec Gottfried Leibniz (1646 – 1716), pričom ten prvý pán formuloval aj základné pohybové zákony tzv. klasickej mechaniky. Ale o tom tiež podrobnejšie až na prednáškach. Teraz vás čakajú pokusy na naklonenej rovine, z ktorých nájsť závery neskôr pomohli objaviť Isaacovi Newtonovi práve tie spomínané pohybové zákony.

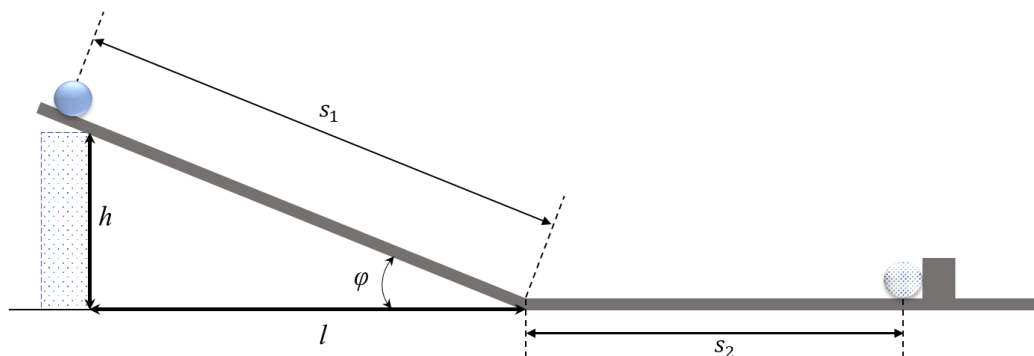
„Pán Galilei, vďaka vám“ – citát z básne Ďalekohľad od Milana Lasicu.

A ešte jedna poznámka na záver. Vo fyzike, technike, ale aj v iných vedách a koniec koncov aj v týchto návodoch k laboratórnym cvičeniam sa stretnete s množstvom matematických vzťahov, ktoré vyjadrujú či už prírodné, technické alebo matematické zákonitosti. Vedzte však, že za každým vzťahom sa skrýva niekoho intelektuálna práca, ktorý premýšľal, experimentoval a snažil sa pochopiť súvislosti v danej problematike. Nie je možné pri každom vzťahu si objasniť históriu jeho objavu, ale každý vzťah ju má.

Pomôcky

Drevená doska so žľabom alebo jej alternatíva, stopky, oceľová guľôčka, zarážka, dĺžkové meradlo.

A. Overiť, či pohyb guľôčky po prechode z naklonenej roviny na vodorovnú rovinu je rovnomerný priamočiary



Obr. 3. Schématické naznačenie meracej aparatury

Postup merania

1. Zostavíme meraciu aparaturu podľa obrázku (Obr. 3).
2. Guľôčku uvoľníme z pokoja na naklonenej rovine tak, aby jej trajektória počas všetkých meraní mala konštantnú dráhu s_1 . Pre rôzne dráhy s_2 na vodorovnej rovine meriame časový interval, za ktorý guľôčka prejde po vodorovnej rovine stanovenú dráhu s_2 .
3. Uskutočníme 10 meraní, pričom každé meranie bude vykonané na dráhe s odlišnou dĺžkou s_2 .

Tabuľka 1.

| i | s_1 (m) | s_2 (m) | t (s) | v_p ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) | σ_{v_p} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) |
|-----|-----------|-----------|---------|--|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\overline{v_p} = \dots$ | |

Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných hodnôt dráh s_2 a k nim prislúchajúcich časových intervalov t pohybu guľôčky po vodorovnej rovine vypočítame priemernú rýchlosť guľôčky podľa vzťahu

$$v_p = \frac{s_2}{t}.$$

- Pre jednotlivé hodnoty priemerných rýchlostí v_p stanovíme neistoty podľa vzťahu

$$\sigma_{v_p} = \sqrt{\frac{1}{t^2} \sigma_s^2 + \frac{s_2^2}{t^4} \sigma_t^2},$$

kde σ_s a σ_t sú štandardné neistoty určenia dráhy a času.

- Zostrojíme graf závislosti priemernej rýchlosti pohybu guľôčky od dráhy $v_p = f(s_2)$.
- V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách neistôt.

B. Overiť, či pohyb guľôčky po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený

Postup merania

- Zostavíme meraciu aparatúru podľa obrázku (Obr. 3).
- Pre nastavený uhol φ medzi podložkou a naklonenou rovinou zmeriame výšku h a dĺžku l .
- Guľôčku uvoľníme z pokoja na naklonenej rovine tak, aby guľôčka prešla postupne rôzne dráhy s_1 . Meriame časový interval t , za ktorý guľôčka zvolenú dráhu prejde.
- Meranie dráhy s_1 a doby pohybu guľôčky t opakujeme 5-krát pre 5 rôznych uhlov φ medzi podložkou a naklonenou rovinou a namerané hodnoty zaznamenávame do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

| $\varphi_i = \arctg(h/l) = \dots$ | | | | | |
|-----------------------------------|-------------------|-----------------|--|--|--|
| $h = \dots \text{ m}$ | | | $l = \dots \text{ m}$ | | |
| i | $s_1 \text{ (m)}$ | $t \text{ (s)}$ | $a \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ | $a_t \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ | $v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | $\bar{a} = \dots$ | | |

Vyhodnotenie merania

- Vypočítame hodnotu uhla φ medzi podložkou a naklonenou rovinou, prislúchajúcemu nameraným hodnotám výšky h a dĺžky l .
- Z nameraných dráh s_1 a k nim prislúchajúcich časových intervalov t pohybu guľôčky určíme veľkosť zrýchlenia guľôčky podľa vzťahu

$$a = \frac{2s_1}{t^2}.$$

3. Z experimentálne získaných hodnôt zrýchlenia guľôčky určíme priemernú hodnotu zrýchlenia \bar{a} .
4. Pre daný uhol φ medzi podložkou a naklonenou rovinou vypočítame použitím vzťahu (10) teoretickú hodnotu zrýchlenia a_t .
5. Určíme veľkosť okamžitej rýchlosti na konci naklonenej roviny podľa vzťahu
$$v = at.$$
6. Zostrojíme graf závislosti zrýchlenia pohybu guľôčky od dráhy $a = f(s_1)$.
7. Zostrojíme graf závislosti priemernej hodnoty experimentálne určeného zrýchlenia guľôčky od uhla $\bar{a} = f(\varphi)$. Do toho istého grafu vynesieme závislosť teoretickej hodnoty zrýchlenia guľôčky od uhla $a_t = f(\varphi)$.
8. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch. Porovnáme teoreticky určené hodnoty zrýchlenia guľôčky s experimentálne určenými hodnotami.

URČENIE KOEFICIENTU STATICKÉHO A DYNAMICKÉHO TRENIA

Úlohy

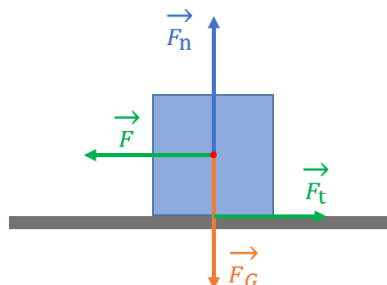
- Určenie koeficientu statického trenia
- Určenie koeficientu dynamického trenia
- Overiť závislosť trecej sily od obsahu dotykovej plochy

Teoretický úvod

Za vodorovnú rovinu vo všeobecnosti môžeme považovať akúkoľvek plochu (podložka, podlaha...), ktorá je rovnobežná so zemským povrchom. Teleso položené na takejto podložke pôsobí na podložku svojou tiažou $G = mg$, ktorá sa prejavuje ako tlaková sila na podložku a je spôsobená tiažovou silou F_G . Podľa zákona akcie a reakcie na toto teleso pôsobí reakcia podložky, ktorú nazývame normálová sila F_n . Normálová sila (Obr. 1) je vždy kolmá na dotykovú rovinu, v prípade telesa nachádzajúceho sa na vodorovnej ploche v pokoji musí byť splnená podmienka

$$F_n + F_G = 0. \quad (1)$$

Predstavme si kváder, ktorý leží na podlahe. Snažíme sa ho tlačiť vodorovne konštantnou silou F , ale kváder sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila F , ktorou na kváder pôsobíme, je kompenzovaná vodorovnou trecou silou F_t , ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste spodnej podstavy kvádra (Obr. 1). Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na kváder pôsobili. Sily trenia vznikajú medzi pevnými telesami, ktoré sa navzájom dotýkajú a sú k sebe pritláčané určitou silou. Ak je teleso napriek pôsobeniu sily v pokoji, hovoríme o **statickom trení**. Ani jedna z kontaktných síl (sila trenia a reakcia podložky) nemôžu samostatne zmeniť pohybový stav telesa.



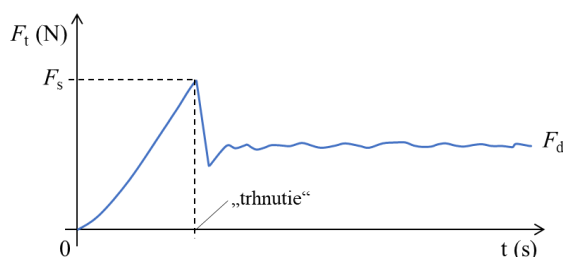
Obr. 1. Smer pôsobenia tiažovej sily F_G , normálovej sily F_n a smer trecej sily F_t pri pôsobení sily F

Ak trecie sily vznikajú pri vzájomnom pohybe dvoch dotýkajúcich sa telies, hovoríme o **dynamickom trení**. Dynamické trenie sa prejavuje silami pôsobiacimi proti smeru vzájomného pohybu telies. Má vždy opačný smer ako je smer okamžitej rýchlosti. Pri dynamickom trení rozlišujeme **šmykové trenie** a **valivé trenie**. Ak sú dotýkajúce sa povrchy suché, hovoríme o suchom trení a ak je medzi nimi vrstva viskózneho látky (maziva), hovoríme o viskóznom trení. V prípade rovinných dotykových plôch sa používa pri určení trenia **Amontonsov-Coulombov zákon**. Pri suchom trení, podľa tohto zákona, veľkosť trecej sily F_t nezávisí od obsahu dotykovej plochy, ale je priamo úmerná veľkosti normálovej zložky sily F_n

$$F_t = \mu F_n. \quad (2)$$

Konštanta μ sa nazýva **koeficient trenia** a je to bezrozmerná fyzikálna veličina. Keďže rozlišujeme dve sily trenia, statickú a dynamickú, potom hovoríme o koeficientoch statického trenia μ_s a dynamického trenia μ_d .

Silu statického trenia si možno ozrejmiť pomocou nasledovného experimentu. Po horizontálnej rovine začneme na kváder pôsobiť malou ťahovou silou F , ktorá je rovnobežná s horizontálnou rovinou. Kváder, aj napriek pôsobeniu malej sily, svoju začiatočnú polohu nezmení. Pozorujeme, že poloha kvádra sa so vzrastajúcou veľkosťou sily nemení, a kváder sa pohne, až keď sila nadobudne určitú kritickú hodnotu F_s . Hraničnú hodnotu (Obr. 2), ktorú musíme prekonať, aby sme teleso uviedli do pohybu, nazývame silou statického trenia F_s a vypočítame ju ako $F_s = \mu_s F_n$. Koeficient μ_s závisí od materiálu, od povrchovej úpravy jednotlivých dotykových plôch telesa a podložky (drsnoty, resp. hladkosti) a na množstve iných vplyvov ako je napr. teplota. Koeficient μ_s prakticky nezávisí od veľkosti plochy vzájomného dotyku telies.

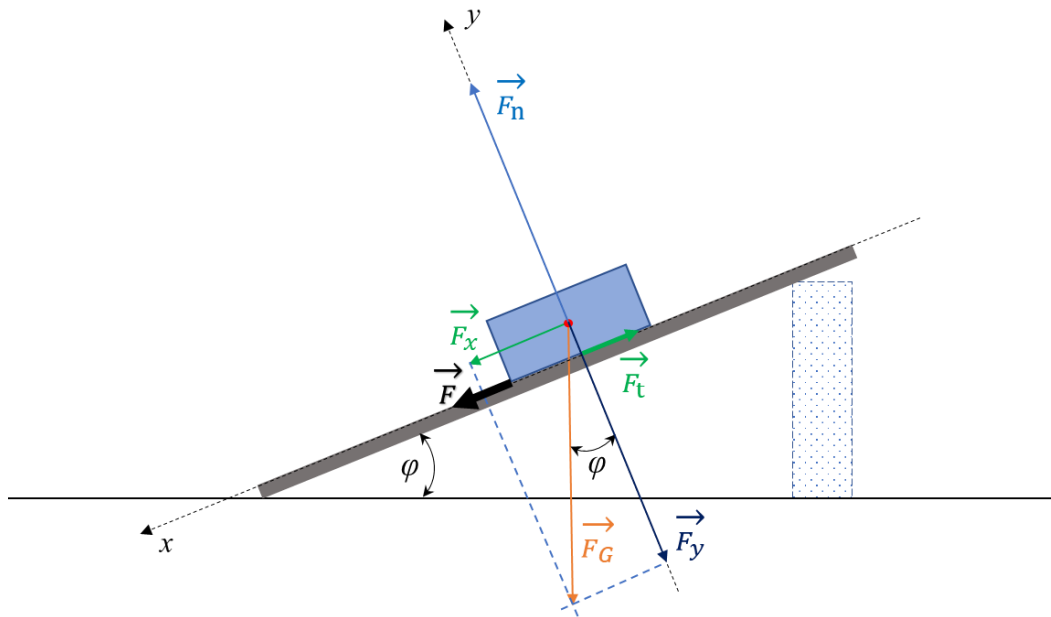


Obr. 2. Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je kváder v pokoji, cez začiatok pohybu, až po približne rovnomerný pohyb

Keď veľkosť pôsobiacej sily F prekročí hodnotu sily statického trenia F_s , kváder sa „trhne“, stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa pohybovať so zrýchlením a , na čo však už stačí len sila o veľkosti F_d . Ak sa teleso v dôsledku pôsobenia ťahovej sily F šmýka po drsnej podložke konštantnou rýchlosťou v , podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na teleso rovnako veľká, opačne orientovaná sila, nazývaná **sila dynamického trenia** F_d . Aj pre silu dynamického trenia platí Amontonsov-Coulombov zákon, t. j. $F_d = \mu_d F_n$.

Ak je teleso na naklonenej rovine, tak sa situácia so silami trochu komplikuje, lebo tiaž telesa G má iný smer ako normálová sila F_n (Obr. 3). Tiaž telesa má vždy zvislý smer a normálová sila je vždy kolmá na povrch roviny, ktorej sa telesá svojimi povrchmi dotýkajú. Pri šmýkaní telesa po naklonenej rovine je výsledná sila spôsobujúca pohyb telesa rovná vektorovým súčtom tiažovej sily F_G , normálovej sily (reakcie podložky) F_n a sily trenia F_t

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t. \quad (3)$$



Obr. 3. Teleso na naklonenej rovine a sily pôsobiace na teleso pri šmýkaní smerom nadol

Pri pohybe po naklonenej rovine, zvierajúcej s vodorovnou podložkou uhol φ je vhodné rozložiť pôsobiace sily na zložky rovnobežné s naklonenou rovinou (os x) a na zložky kolmé na naklonenú rovinu (os y)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G = [F_x, F_y] &= [G \sin(\varphi), -G \cos(\varphi)], & \mathbf{F}_n &= [0, F_n], \\ \mathbf{F}_t &= [-F_t, 0], & \mathbf{F} &= [ma, 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

V smere rovnobežnom (os x) s naklonenou rovinou platí

$$ma = G \sin(\varphi) - F_t. \quad (5)$$

V smere kolmom (os y) na naklonenú rovinu platí

$$0 = -G \cos(\varphi) + F_n \quad \text{a teda} \quad F_n = G \cos(\varphi). \quad (6)$$

Po dosadení vyjadrenia normálovej sily z rovnice (6) do vzťahu (2) pre silu trenia dostávame

$$F_t = \mu_d F_n = \mu_d G \cos(\varphi) \quad (7)$$

a použitím rovnice (5), dostaneme

$$ma = mg \sin(\varphi) - \mu_d mg \cos(\varphi). \quad (8)$$

Z rovnice (8) matematickou úpravou dostaneme vzťah pre koeficient dynamického trenia

$$\mu_d = \frac{g \sin(\varphi) - a}{g \cos(\varphi)}, \quad (9)$$

kde μ_d je koeficient dynamického trenia a a je zrýchlenie telesa. Keďže predpokladáme, že sila trenia nie je funkciou rýchlosti, tak šmykový pohyb je rovnomerne zrýchlený s konštantným zrýchlením (výsledná sila $F = ma$ v rovnici (8) je konštantná). Ak zmeriame časový interval t od začiatku pohybu, za ktorý teleso prejde dráhu s , tak potom zrýchlenie vypočítame zo vzťahu

$$a = \frac{2s}{t^2}. \quad (10)$$

V prípade, že chceme určiť koeficient statického trenia, koniec dosky, na ktorom je položené teleso, budeme postupne dvíhať nahor, v dôsledku čoho zväčšujeme uhol φ naklonenej roviny. V hraničnom prípade, kedy $\varphi = \varphi_k$, je ešte zrýchlenie kvádra nulové ($a = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), potom z rovnice (8) pre koeficient statického trenia platí vzťah

$$\mu_s = \frac{\sin(\varphi_k)}{\cos(\varphi_k)} = \text{tg}(\varphi_k). \quad (11)$$

Pomôcky

Naklonená rovina s regulovateľným uhlom sklonu, univerzálne teleso pre pokusy so šmykovým trením s trecími plochami telesa z rôznych materiálov (drevo, guma, koža a brúsny papier), teleso pre pokusy so šmykovým trením s možnosťou rozloženia telesa za účelom zdvojnásobenia trecej plochy, dĺžkové meradlo, stopky, zarážka.

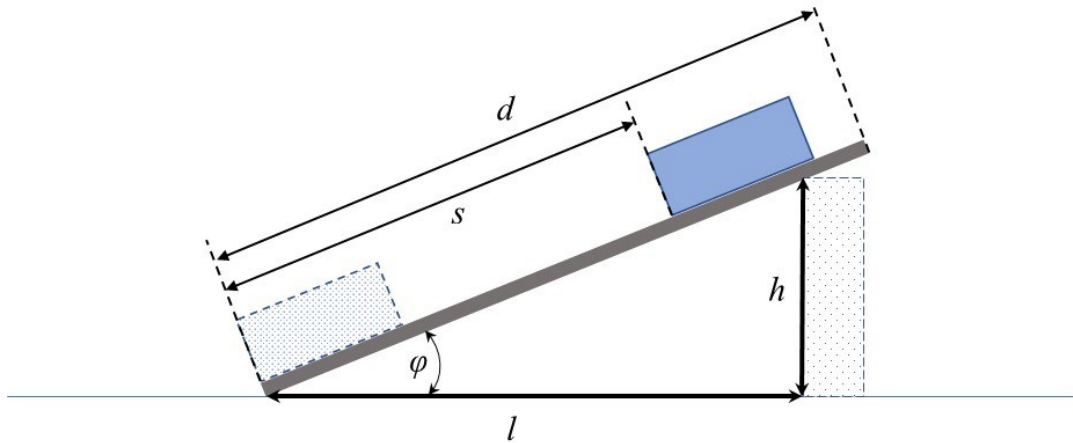
Pozn.: Na domáci experiment nám ako naklonená rovina postačí zostrojená z podpretej dosky s dostatočnou šírkou, aby po nej dokázalo kĺzať teleso celou vyšetrovanou plochou, ako podložka môže poslúžiť pomerne ťažký a geometricky symetrický predmet a teleso s povrchom vhodným na kĺzanie.

A. Určenie koeficientu statického trenia

Postup merania

1. Na koniec dosky položíme teleso. Vzdialenosť prednej steny telesa od začiatku naklonenej roviny označíme s .
2. Dosku postupne dvíhame na jednom konci do určitej výšky naklonenej roviny h , pri ktorej je teleso v danom okamihu uvedené do pohybu, t. j. začne sa šmykať

(Obr. 4). Odmeriame výšku h a vzdialenosť l a hodnoty l , h zaznamenáme do tabuľky 1. Meranie zopakujeme 10-krát.



Obr. 4. Parametre pri meraní na naklonenej rovine

- Opakujeme meranie podľa pokynov uvedených v bode 1 a 2 postupu merania pre rôzne materiály trecích plôch telesa. Hodnoty jednotlivých parametrov zaznamenávame do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

| i | h_i (m) | l_i (m) | φ_i ($^\circ$) | μ_{s_i} | $\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$ |
|-----|-----------|-----------|--------------------------|-----------------------|--|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{\mu}_s = \dots$ | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

- Vypočítame koeficienty statického trenia μ_{s_i} pre jednotlivé hodnoty výšky h a vzdialenosti l podľa vzťahu

$$\mu_{s_i} = \frac{h_i}{l_i}.$$

- Určíme priemernú hodnotu (aritmetický priemer) koeficientu statického trenia $\bar{\mu}_s$, strednú kvadratickú odchýlku jedného merania σ_{μ_s} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{\mu}_s}$. Ak je niektorá z 10 hodnôt μ_{s_i} mimo interval $(\bar{\mu}_s - 3\sigma, \bar{\mu}_s + 3\sigma)$, vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a neistoty merania znovu prepočítame.
- Výsledok merania uvádzame v tvare $\mu_s = (\bar{\mu}_s \pm \sigma_{\bar{\mu}_s})$.
- Vypočítame kritický uhol zo vzťahu $\varphi_k = \arctg(\mu_s)$.

B. Určenie koeficientu dynamického trenia

Postup merania

1. Meranie parametrov pre určenie koeficientu dynamického trenia uskutočníme s telesom s materiálmi trecích plôch vyšetrovaných v úlohe po A.
2. Na naklonenú rovinu, ktorá zvierá s podložkou uhol $\varphi > \varphi_k$ (kritický uhol φ_k poznáme z úlohy A. Určenie koeficientu statického trenia) umiestnime teleso tak, aby jeho predná stena bola vo vzdialenosti s od začiatku naklonenej roviny (Obr. 4). Toto teleso pridržíme v začiatkovej polohe a súčasne so spustením stopiek ho uvoľníme. Meriame časový interval t , za ktorý sa teleso presunie z jedného konca naklonenej roviny na druhý koniec (prejde vzdialenosť s). Uhol φ určíme na základe odmeraných vzdialeností h a l výpočtom zo vzťahu $\varphi = \arctg\left(\frac{h}{l}\right)$.
3. Meranie opakujeme 10-krát pre 2 rôzne uhly φ väčšie ako kritický uhol φ_k , t. j. vykonáme 2-krát po 10 meraní. Namerané hodnoty s , t , h a l zapisujeme do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

| $\varphi_1 = \arctg(h/l) = \dots$ | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------|-----------------|--|-----------------------|--|
| | $h = \dots \text{ m}$ | | $l = \dots \text{ m}$ | | |
| i | $t_i \text{ (s)}$ | $s \text{ (m)}$ | $a_i \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ | μ_{d_i} | $\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{\mu}_d = \dots$ | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |
| $\varphi_2 = \arctg(h/l) = \dots$ | | | | | |
| | $h = \dots \text{ m}$ | | $l = \dots \text{ m}$ | | |
| i | $t_i \text{ (s)}$ | $s \text{ (m)}$ | $a_i \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ | μ_{d_i} | $\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{\mu}_d = \dots$ | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných hodnôt doby šmýkania t a dráhy s , po ktorej sa teleso pohybovalo, určíme zrýchlenie a zo vzťahu (10) a koeficient dynamického trenia μ_d zo vzťahu (9).
2. Určíme priemernú hodnotu μ_d a prislúchajúce neistoty merania σ_{μ_d} a $\sigma_{\bar{\mu}_d}$.
3. Ak je niektorá z hodnôt μ_{d_i} mimo interval $(\mu_d - 3\sigma, \mu_d + 3\sigma)$, vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a neistoty merania znovu prepočítame.

4. Výsledok merania uvádzame v tvare $\mu_{d_i} = (\bar{\mu}_{d_i} \pm \sigma_{\bar{\mu}_{d_i}})$.
5. Vypočítame vážený priemer koeficientu dynamického trenia a jeho neistotu z dvoch priemerných hodnôt μ_d získaných pre dva uhly φ .
6. Výslednú hodnotu koeficientu dynamického trenia uvádzame v tvare $\mu_d = (\bar{\mu}_d \pm \sigma_{\bar{\mu}_d})$.

C. Overiť závislosť trecej sily od obsahu dotykovej plochy

Postup merania

1. Zostavíme meraciu aparatúru podľa obrázku (Obr. 4).
2. Na jeden koniec dosky položíme teleso s obsahom trecej plochy S_1 . Vzdialenosť prednej steny telesa od začiatku dosky (vytvorenej naklonenej roviny) označíme s .
3. Koniec dosky, na ktorom je položené teleso, postupne dvíhame do určitej výšky h , pri ktorej je teleso v danom okamihu uvedené do pohybu, t. j. začne sa šmýkať (Obr. 4). Odmeriame výšku h a vzdialenosť l a hodnoty l, h zaznamenáme do tabuľky 3. Meranie zopakujeme 10-krát.
4. Na koniec dosky položíme teleso rovnakej hmotnosti s trecou plochou vytvorenou z rovnakého materiálu ako v bode 2 postupu merania no s veľkosťou dotykovej plochy S_2 . Opakujeme meranie podľa pokynov uvedených v bode 2 a 3 postupu merania a hodnoty jednotlivých parametrov zaznamenávame do tabuľky 3.

Tabuľka 3.

| $S_1 = a_1 b_1$ | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------------|-----------------------|--|
| $a_1 = \dots$ m | | | $b_1 = \dots$ m | | |
| i | h_i (m) | l_i (m) | φ_i (°) | μ_{s_i} | $\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{\mu}_s = \dots$ | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

| $S_2 = a_2 b_2$ | | | | | |
|-----------------|-----------|-----------|-----------------|-----------------------|--|
| $a_2 = \dots$ m | | | $b_2 = \dots$ m | | |
| i | h_i (m) | l_i (m) | φ_i (°) | μ_{s_i} | $\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{\mu}_s = \dots$ | $\sum \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Vypočítame koeficienty statického trenia μ_{s_i} pre jednotlivé hodnoty výšky h_i a vzdialenosti l_i podľa vzťahu

$$\mu_{s_i} = \frac{h_i}{l_i}.$$

Koeficient statického trenia vypočítame pre teleso s obsahom dotykovej plochy S_1 aj teleso s obsahom dotykovej plochy S_2 .

2. Určíme priemernú hodnotu koeficientu statického trenia $\bar{\mu}_s$, strednú kvadratickú odchýlku jedného merania σ_{μ_s} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{\mu}_s}$.
3. Výsledok merania uvádzame pre obidve merania v tvare $\mu_s = (\bar{\mu}_s \pm \sigma_{\bar{\mu}_s})$.
4. Vypočítame kritický uhol zo vzťahu $\varphi_k = \text{arctg}(\mu_s)$.
5. Porovnáme hodnoty koeficientov statického trenia.

Pozn.: Podľa Amontonsovho-Coulombovho zákona, veľkosť trecej sily F_t nezávisí od obsahu dotykovej plochy, ale je priamo úmerná veľkosti normálovej zložky sily F_n , vzťah (2). Tento výrok možno jednoducho overiť, ak položíme do rovnosti dve trecie sily, ktoré vznikajú pri vzájomnom pôsobení telesa s rôznou dotykovou plochou S_1 , S_2 s podložkou, t. j. ak platí $F_{t_1} = F_{t_2}$. Po dosadení za F_t zo vzťahu (2) platí $\mu_{s_1} F_n = \mu_{s_2} F_n$, pričom veľkosť normálovej zložky sily sa pri identickom telese a konštantnom uhle nemení. Z toho vyplýva, že veľkosť koeficientu statického trenia je rovnaká pre rôzne veľkosti dotykových plôch, t. j. $\mu_{s_1} = \mu_{s_2}$.

6. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch, možných príčinách chýb a platnosti Amontonsovho-Coulombovho zákona.

URČENIE KOEFICIENTU DYNAMICKEJ VISKOZITY TELIESKOVÝMI VISKOZIMETRAMI

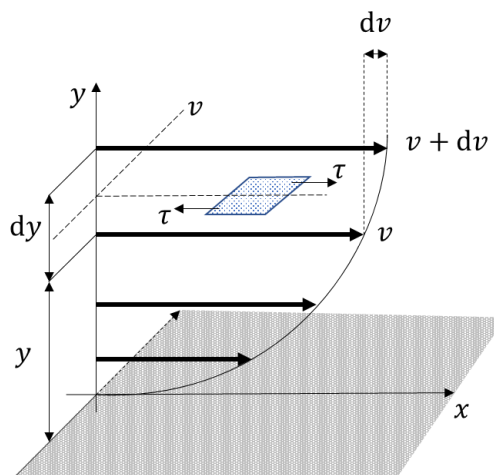
Úlohy

- A. Meranie času pádu telesa v kvapaline v simulovanom experimente
- B. Určenie koeficientu dynamickej viskozity Stokesovým viskozimetrom

Teoretický úvod

Reálne kvapaliny sa vždy vyznačujú vnútorným trením. Vnútorné trenie, alebo **viskozita**, je fyzikálna veličina, ktorá závisí predovšetkým od veľkosti príťažlivých síl, ktoré pôsobia medzi jednotlivými molekulami kvapaliny. Ak sú príťažlivé sily väčšie, kvapalina má väčšiu viskozitu. Väčšia viskozita kvapaliny sa prejavuje väčším „brzdením“ pohybu kvapaliny a preto je kvapalina menej tekutá. Veľkosť viskozity kvapaliny závisí aj od teploty a tlaku. So zvyšujúcou sa teplotou viskozita kvapalín klesá. Vplyv tlaku na zmenu viskozity je zanedbateľný, pokiaľ neuvažujeme vyššie hodnoty tlaku.

Ak prúdi kvapalina potrubím, je možné pozorovať, že vrstva kvapaliny tesne priliehajúca k stene potrubia prilieha k jeho povrchu a je v pokoji. Rýchlosť prúdenia kvapaliny sa zvyšuje s rastúcou vzdialenosťou od steny potrubia a najvyššiu rýchlosť dosahuje v strede potrubia. Toto správanie sa kvapalín vysvetľujeme pôsobením vnútorného trenia. Predstavme si kvapalinu prúdiacu v potrubí v smere osi x (Obr. 1).



Obr. 1. Prúdenie reálnej kvapaliny

Rozdeľme si kvapalinu na jednotlivé vrstvy, ktoré v závislosti od vzdialenosti od steny potrubia (od súradnice y) sa pohybujú rôznymi rýchlosťami v . Zmenu rýchlosti, ktorú môžeme pozorovať pri postupe od vrstvy k vrstve, charakterizujeme podielom $\frac{dv}{dy}$, kde dv je rozdiel rýchlostí medzi dvoma susediacimi vrstvami kvapaliny vzdialenými o dy v smere kolmom na prúd kvapaliny, t. j. v smere osi y . V dôsledku toho, že sa jednotlivé vrstvy kvapaliny

pohybujú rôznou rýchlosťou, vzniká medzi nimi tangenciálne napätie τ . Jeho smer leží v smere rýchlosti, t. j. v smere osi x a jeho veľkosť je daná vzťahom

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (1)$$

kde η je koeficient dynamickej viskozity, jedna z materiálových konštánt, ktorého jednotka je $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ($\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$). S nárastom koeficientu dynamickej viskozity klesá tekutosť kvapaliny.

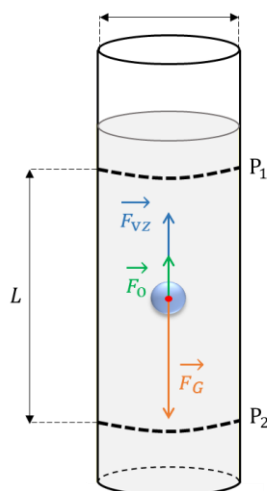
Na vyjadrenie viskózných vlastností kvapalín sa okrem koeficientu dynamickej viskozity η zavádza aj koeficient kinematickej viskozity ν definovaný vzťahom

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (2)$$

kde ρ je hustota vyšetrovanej kvapaliny. Jednotkou ν je $1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Vplyv vnútorného trenia (viskozity) kvapaliny sa neprejavuje iba pri jej tečení. Ak sa teleso pohybuje v kvapaline, kvapalina kladie telesu odpor, ktorý je pri pomalom prúdení priamo úmerný rýchlosti. Túto skutočnosť využívame pri určovaní koeficientu dynamickej viskozity η v tzv. telieskových viskozimetroch. Sú to zariadenia, v ktorých sa koeficient dynamickej viskozity určuje z rýchlosti voľného pádu telesa vo vyšetrovanej kvapaline.

Budeme vyšetrovať voľný pád guľôčky v kvapaline s danou viskozitou. Na začiatku pohybu bude rýchlosť nulová a účinkom tiažovej sily začne guľôčka padať, rýchlosť sa bude zvyšovať. So zvyšujúcou rýchlosťou sa zväčšuje aj odpor, ktorý kladie tekutina padajúcej guľôčke. Keďže odporová sila závisí od rýchlosti, bude pohyb guľôčky nerovnomerne zrýchlený.



Obr. 2. Model Stokesovho viskozimetra

Na guľôčku pohybujúcu sa v kvapaline pôsobí tiažová sila F_G , vztlaková sila F_{vz} a odporová sila F_o (Obr. 2) a guľôčka koná rovnomerný priamočiary pohyb s rýchlosťou v_m , ak sa vektorový súčet síl pôsobiacich na guľôčku rovná nule, t. j.

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{vz} + \mathbf{F}_o = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$F_G - (F_{vz} + F_o) = 0. \quad (4)$$

Pre teleso tvaru pravidelnej gule s hmotnosťou m , polomeru r a materiálu s hustotou ρ_t veľkosť tiažovej sily môžeme vyjadriť nasledovne

$$F_G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_t g. \quad (5)$$

Veľkosť vztlakovej sily, ktorá pôsobí na guľôčku vo vyšetrovanej kvapaline hustoty ρ_k , vyjadríme ako

$$F_{vz} = V_t \rho_k g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g. \quad (6)$$

Pre teleso tvaru gule s polomerom r v neohraničenom prostredí v prípade laminárneho obtekania, t. j. pre nie príliš veľké rýchlosti v , môžeme odporovú silu vyjadriť tzv. Stokesovým vzťahom

$$F_o = 6\pi\eta r v. \quad (7)$$

Tiažová sila a vztlaková sila sú konštantné sily, ktoré nezávisia od veľkosti rýchlosti guľôčky v . Veľkosť odporovej sily F_o narastá s narastajúcou hodnotou rýchlosti v .

Pre ustálenú rýchlosť v_m dosadením vyjadrení veľkostí jednotlivých síl (vzťahy (5), (6) a (7)) do vzťahu (4) dostaneme rovnicu

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_t g - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g + 6\pi\eta r v_m \right) = 0. \quad (8)$$

Úpravou rovnice dostaneme vzťah pre rýchlosť rovnomerného pohybu v tvare

$$v_m = \frac{2(\rho_t - \rho_k)r^2 g}{9\eta}. \quad (9)$$

Ak zmeriame časový interval t , za ktorý guľôčka pohybujúca sa rovnomernou rýchlosťou prejde dráhu L (Obr. 2.), môžeme určiť jej rýchlosť $v_m = \frac{L}{t}$ a po dosadení do vzťahu (9) môžeme vyjadriť koeficient dynamickej viskozity η v tvare

$$\eta = \frac{2(\rho_t - \rho_k)r^2 g t}{9L} = \frac{1}{18} \frac{(\rho_t - \rho_k)d^2 g t}{L}. \quad (10)$$

Ako rýchlo guľôčka dosiahne rýchlosť v_m , to závisí od rozdielu hustoty kvapaliny a materiálu guľôčky. Ukazuje sa, že pri malom rozdiel hustôt guľôčka dosiahne rýchlosť v_m za niekoľko sekúnd. Presnosť merania η závisí nielen od rovnomernosti teploty vyšetrovanej kvapaliny, ale aj od toho či rýchlosť v_m určujeme na dráhe, na ktorej guľôčka už vykonáva rovnomerný pohyb, alebo nie. Koeficient dynamickej viskozity je silne závislý od teploty kvapaliny. Uvedený vzťah (10) na určenie koeficientu dynamickej viskozity platí iba v prípade, že guľôčka padá v neohraničenom prostredí. Pri voľnom páde guľôčky s priemerom d pozdĺž osi trubice s vnútorným priemerom D je potrebné vypočítanú hodnotu koeficientu dynamickej viskozity korigovať na pohyb v ohraničenom prostredí korekčným faktorom K_F určeným vzťahom

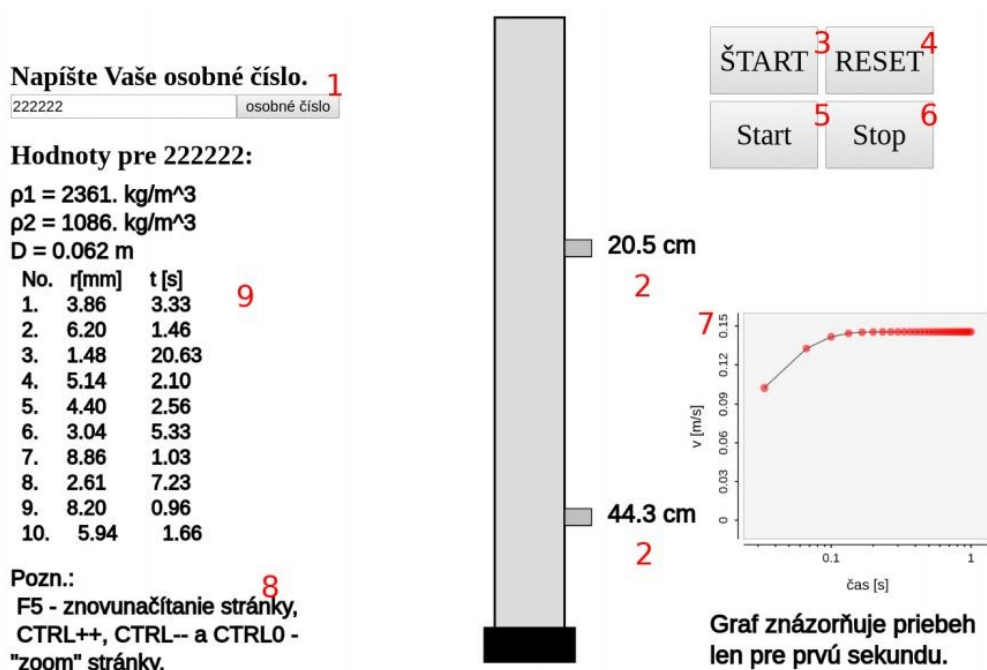
$$K_F = \frac{1}{1 + 2,4 \frac{d}{D}}. \quad (11)$$

Pomôcky

Stokesov viskozimeter (sklenený valec so značkami naplnený viskóznou kvapalinou), telesá pravidelného guľovitého tvaru (sklenené, oceľové, olovené guľôčky), mikrometrické meradlo, posuvné meradlo, dĺžkové meradlo, teplomer, stopky.

A. Meranie času pádu telesa v kvapaline v simulovanom experimente

Simulačný program "mViskozita" slúži na simulované meranie času pádu telesa vo viskózne kvapaline potrebného na určenie jej koeficientu dynamickej viskozity. Dôležité časti programu sú očíslované (Obr. 3).



Obr. 3. Snímka obrazovky so spusteným programom "mViskozita"

Postup merania

1. Vyplníte osobné číslo (pod ktorým ste vedený na <http://vzdelavanie.uniza.sk>) a potvrdíte kliknutím na tlačidlo (1).
2. Vygenerované hodnoty potrebných parametrov pre dané osobné číslo sa zobrazia nižšie.
3. Obdĺžniky (2) reprezentujú prstence (zarážky) a sú nastaviteľné.
4. Vpravo hore sa nachádzajú tlačidlá "ŠTART" (3), "RESET" (4), "Start" (5) a "Stop" (6). Kliknutím na "ŠTART" sa spustí simulácia, guľôčka začne padať.
5. Meranie času sa vykonáva tlačidlami "Start" a "Stop". Tlačidlo "Start" spúšťa stopky, tlačidlo "Stop" zaznamenáva časový interval, ktorý uplynul od začiatku merania (od stlačenia tlačidla "Start") až po okamih stlačenia tohto tlačidla.
6. V pravom dolnom rohu sa znázorňuje časový priebeh rýchlosti pre prvú sekundu merania (7).
7. Tlačidlo "RESET" slúži na vymazanie nameraných hodnôt.
8. Namerané hodnoty sa zobrazujú v tabuľke (9).
9. Ku referátu je potrebné priložiť celú snímku obrazovky (Obr. 3) obsahujúcu osobné číslo, vygenerované hodnoty a namerané výsledky. Poznámka: tlačidlo "F5" slúži na opätovné načítanie stránky. Zväčšovanie, zmenšovanie a návrat na pôvodnú veľkosť stránky sa vykonáva stlačením CTRL++, CTRL-- a CTRL0 (8).

B. Určenie koeficientu dynamickej viskozity Stokesovým viskozimetrom

V laboratórnych podmienkach Stokesov viskozimeter tvorí dlhá trubica priemeru rádovo niekoľko centimetrov naplnená meranou kvapalinou. Môže to byť napríklad odmerný valec. Pri tejto metóde necháme guľôčku z materiálu o známej hustote ρ_t voľne padať vo vyšetrovanej kvapaline hustoty ρ_k . Guľôčku púšťame do kvapaliny tak, že ju uchopíme pinzetou, ponoríme tesne pod hladinu kvapaliny a pustíme tak, aby sme jej neudelili rotáciu. Meriame dobu t , za ktorú prejde guľôčka dráhu L medzi dvoma prstencami P_1 a P_2 . Pri určovaní koeficientu dynamickej viskozity η použitou metódou musíme poznať dráhu L , po ktorej sa guľôčka už pohybuje konštantnou rýchlosťou v_m .

Postup merania

1. Nasledujúcim postupom určíme vzdialenosť L , na ktorej sa guľôčka už pohybuje rovnomerným pohybom.
 - a) Nastavíme horný prstenec P_1 približne do polovice výšky trubice a prstenec P_2 umiestnime ku spodnej časti trubice.
 - b) Guľôčku z materiálu o známej hustote ρ_t necháme voľne padať v meranej kvapaline hustoty ρ_k a meriame časový interval t , za ktorý prejde guľôčka dráhu L

medzi dvoma prstencami P_1 a P_2 . Vypočítame z nameraných údajov dráhy a časového intervalu rýchlosť pádu guľôčky.

- c) Potom premiestnime prstenec P_1 asi do $2/3$ výšky valca a opäť určíme rýchlosť pádu guľôčky ako v kroku b. Ak sa hodnota určenej rýchlosti od predchádzajúcej výrazne nelíši (t. j. v intervale presnosti merania), na uvedenej dĺžke L vykonáme merania podľa postupu od bodu 3.
2. Ak rýchlosť guľôčky určená v bode 1.c postupu merania bude menšia ako hodnota rýchlosti určená v bode 1.b, opakujeme postup určenia rýchlosti pre dve nižšie polohy prstenca P_1 . Ak ani po tomto meraní nedosiahneme rovnaké hodnoty rýchlostí, zvolíme si na meranie guľôčku s menším priemerom a opakujeme postup určenia vzdialenosti L .
3. Z tabuliek v prílohe zistíme hustotu vyšetrovanej kvapaliny ρ_k a hustotu materiálu použitých guľôčok ρ_t .
4. Hustotu guľôčok môžeme určiť aj jednou z metód na určenie hustoty. Pre homogénnu vzorku hmotnosti m a objemu V je hustota definovaná vzťahom $\rho = \frac{m}{V}$.
- a) Hmotnosť m určíme vážením, tak že odvážime napr. naraz aspoň 20 guľôčok toho istého priemeru a určíme najpravdepodobnejšiu hodnotu hmotnosti guľôčky \bar{m} . Určíme štandardnú neistotu merania hmotnosti σ_m , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.
- b) Mikrometrickým meradlom meriame priemer d 20 guľôčok použitých na učenie hmotnosti a určíme aritmetický priemer \bar{d} , strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{d}}$.
- c) Objem určíme pomocou nameraných geometrických rozmerov pomocou vzťahu $\bar{V} = \frac{4}{3}\pi\bar{r}^3 = \frac{1}{6}\pi\bar{d}^3$.
- d) Vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu hustoty guľôčky $\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\frac{1}{6}\pi\bar{d}^3}$ a pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu $\sigma_{\bar{\rho}}$ pomocou neistôt priamo meraných veličín m, d podľa vzťahu
- $$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{m}}\right)^2 \sigma_{\bar{m}}^2 + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{d}}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2}.$$
- e) Výsledok zapíšeme v tvare $\rho = (\bar{\rho} \pm \sigma_{\bar{\rho}})$ a zhodnotíme presnosť merania hustoty guľôčky.
5. Posuvným meradlom odmeriame vnútorný priemer valca D_i .
6. Odmeriame teplotu kvapaliny bezprostredne pred meraním (t_1) a po meraní (t_2).
7. Mikrometrickým meradlom meriame priemer guľôčky d_i a stopkami časový interval t_i , za ktorý guľôčka prejde dráhu L medzi dvoma prstencami P_1 a P_2 .

8. Namerané údaje priemeru valca D_i , vzdialenosti L , hustoty kvapaliny ρ_k a materiálu guľôčok ρ_t , priemeru guľôčok d_i a časových intervalov pádu guľôčok t_i zapisujeme do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

| | | | | | | | |
|-------------------|-----------|------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| L (m) | | t_1 (°C) | | t_2 (°C) | | ρ_k (kg · m ⁻³) | |
| | | | | $\bar{m} = \frac{m}{20}$ (kg) | | | |
| i | d_i (m) | t_i (s) | v_m (m · s ⁻¹) | D_i (m) | K_{Fi} | η_{ki} (Pa · s) | σ_{η_k} (Pa · s) |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| n | | | | | | | |
| $\bar{d} = \dots$ | | | | $\bar{D} = \dots$ | $\bar{\eta}_k = \dots$ | | |

9. Určíme štandardné neistoty merania vzdialenosti prstencov σ_L , priemeru guľôčok σ_d , vnútorného priemeru valca σ_D , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.

Vyhodnotenie merania

1. Vypočítame korekčný faktor K_{Fi} podľa vzťahu (11).
2. Vypočítame koeficient dynamickej viskozity η_{ki} korigovaný na pohyb guľôčky v konečnom prostredí podľa vzťahu

$$\eta_{ki} = \eta_i K_{Fi} = \frac{1}{18} \frac{(\rho_t - \rho_k) d_i^2 g t_i}{L \left(1 + 2,4 \frac{d_i}{D_i}\right)}$$

3. Určíme aritmetický priemer koeficientu dynamickej viskozity $\bar{\eta}_k$ a neurčitosť σ_{η_k} .
4. V prípade, že na určenie koeficientu dynamickej viskozity použijeme guľôčky približne rovnakého priemeru, stanovíme neistotu, t. j. určíme chybu nepriameho merania k aritmetickému priemeru podľa vzťahu

$$\sigma_{\eta_k} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial t}\right)^2 (\sigma_t)^2 + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial d}\right)^2 (\sigma_d)^2}$$

Pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} = \frac{(\rho_t - \rho_k) d^2 g}{18 L \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)},$$

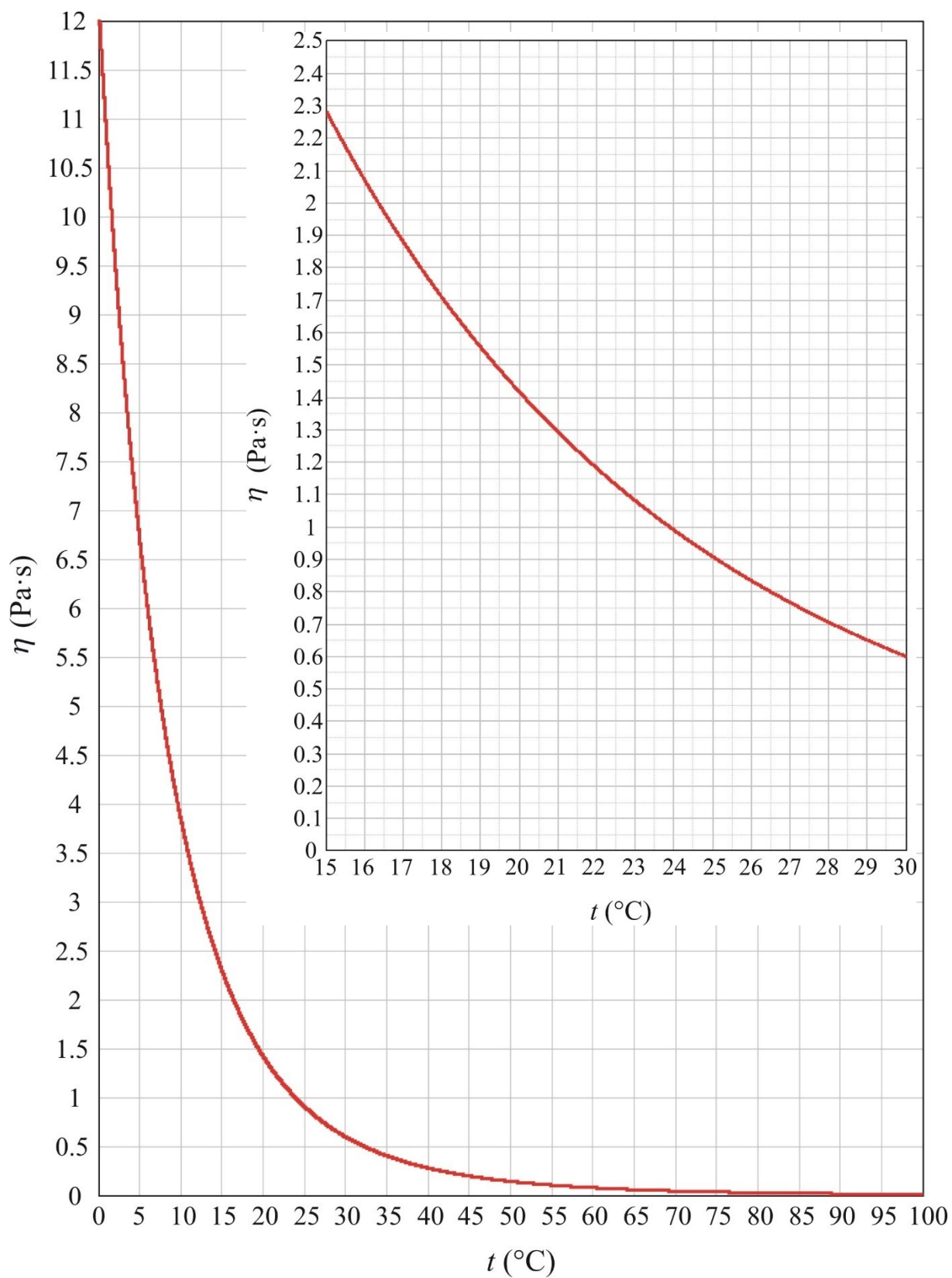
$$\frac{\partial \eta_k}{\partial L} = - \frac{(\rho_t - \rho_k) d^2 g t}{18 L^2 \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)},$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial D} = \frac{2,4 (\rho_t - \rho_k) d^3 g t}{18 D^2 L \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)^2},$$

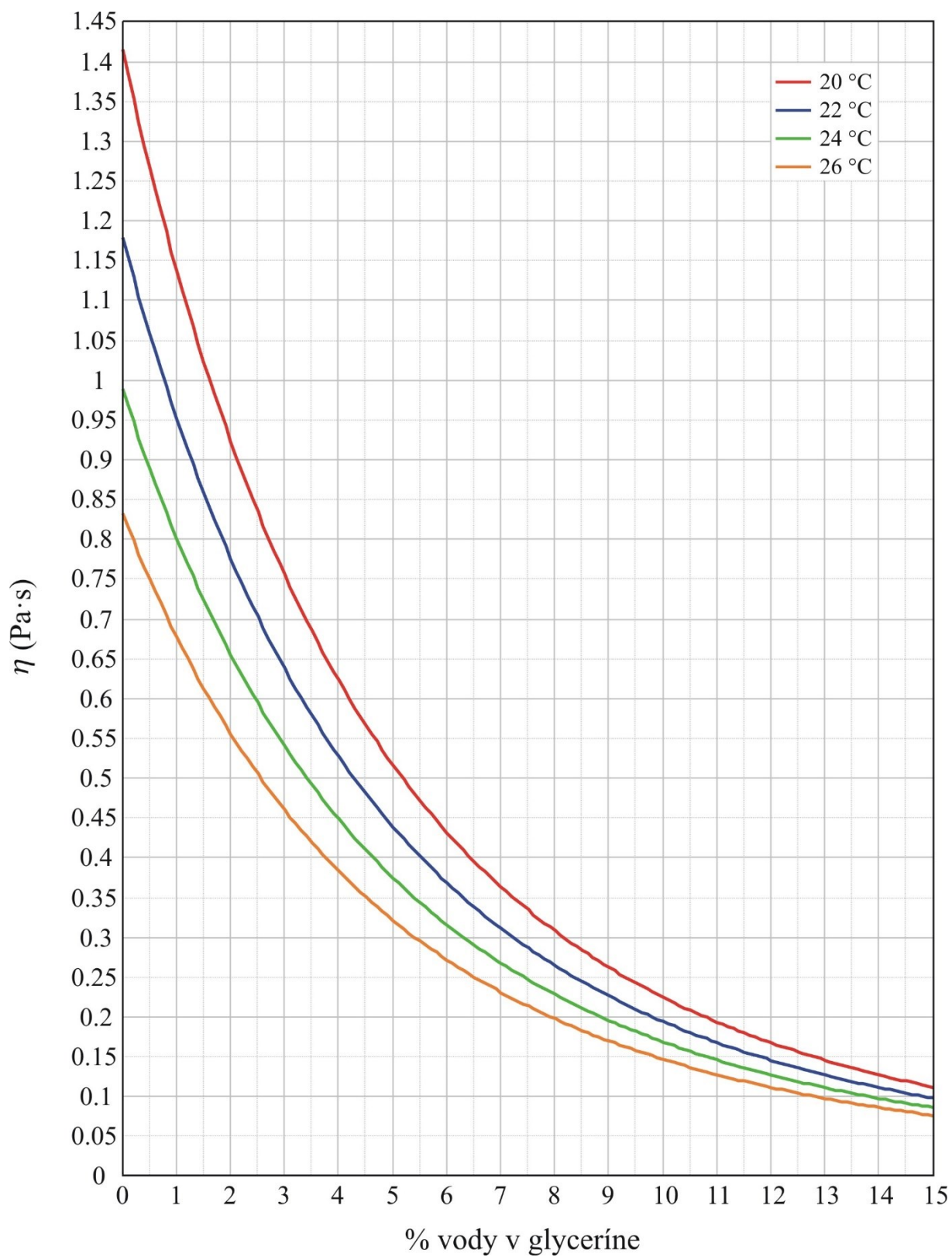
$$\frac{\partial \eta_k}{\partial d} = \frac{(\rho_t - \rho_k) d g t}{9 L \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)} - \frac{2,4 (\rho_t - \rho_k) d^2 g t}{18 D L \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)^2},$$

kde za t , D , d dosadíme aritmetické priemery veličín.

5. Ak použijeme guľôčky rôznych priemerov stanovíme neistotu dynamickej viskozity pre jednotlivé hodnoty.
6. Výsledok určenia koeficientu dynamickej viskozity uvádzame v tvare $\eta_k = (\bar{\eta}_k \pm \sigma_{\eta_k})$.
7. Vypočítame koeficient kinematickej viskozity ν podľa vzťahu (2).
8. Z priloženého grafu závislosti koeficientu dynamickej viskozity od teploty (Obr. 4) určíme teoretickú hodnotu η_t pre vyšetrovanú kvapalinu pre zodpovedajúcu teplotu merania.
9. Aritmetický priemer koeficientu dynamickej viskozity $\bar{\eta}_k$ porovnáme s teoretickým predpokladom η_t .
10. V prípade merania v laboratórnych podmienkach určíme z grafu závislosti koeficientu dynamickej viskozity od obsahu vody v glyceríne, koľko percent vody obsahuje vyšetrovaná kvapalina (Obr. 5).



Obr. 4. Závislosť koeficientu dynamickej viskozity glycerínu od teploty



Obr. 5. Závislosť koeficientu dynamickej viskozity od obsahu vody v glyceríne

MATEMATICKÉ KYVADLO

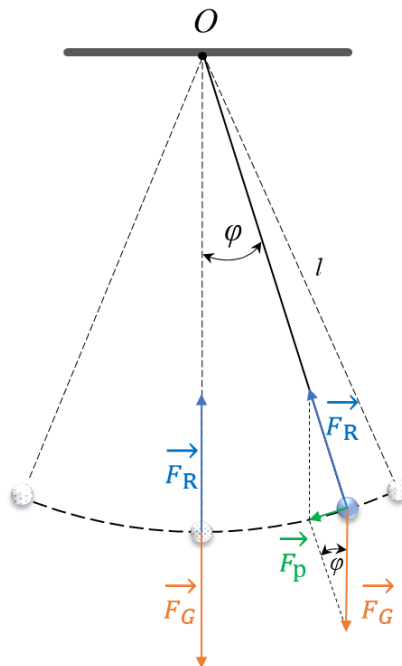
Úlohy

A. Meranie tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom

B. Určenie hmotnosti Zeme pomocou matematického kyvadla

Teoretický úvod

Kyvadlo zohralo v histórii merania času významnú úlohu, pretože periódu jeho kmitov môžeme nastaviť jednoducho a s vysokou presnosťou zmenou jediného parametra, ktorým je dĺžka kyvadla. Matematické kyvadlo pozostáva z telesa so zanedbateľnou hmotnosťou m zaveseného na nedeformujúcom sa vlákne s dĺžkou závesu l , pričom rozmery telesa sú zanedbateľné v porovnaní s dĺžkou závesu l (Obr. 1). Matematické kyvadlo môžeme realizovať zavesením závažia na tenkú pevnú niť, ktorej hmotnosť je zanedbateľná voči hmotnosti závažia.



Obr. 1. Matematické kyvadlo v rovnovážnej polohe, pri vychýlení o uhol φ a v krajných polohách

Ak je matematické kyvadlo v rovnovážnej polohe, tak vonkajšie sily, t. j. tiažová sila F_G a reakcia závesu F_R , sú v rovnováhe za predpokladu, že os otáčania závesu je kolmá na rovinu obrázku (Obr. 1). Po vychýlení telesa z rovnovážnej polohy, a jeho následnom pustení, sa bude teleso pohybovať účinkom pohybovej zložky tiažovej sily $F_p = mg \sin(\varphi)$, kde $mg = F_G$ a g je tiažové zrýchlenie, m je hmotnosť závažia. Po vychýlení sa kyvadlo snaží dostať naspäť do rovnovážnej polohy, preto sila F_p vždy smeruje do rovnovážnej polohy, čo vo vzťahu vyjadruje znamienko mínus. Ak vychýlime kyvadlo z rovnovážnej polohy (Obr. 1), veľkosť momentu sily je daná vzťahom $M = -F_p l = -mgl \sin(\varphi)$.

Kyvadlo vykonáva otáčavý pohyb okolo pevnej osi, pre ktorý môžeme napísať pohybovú rovnicu v tvare

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu sily, $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia a I je moment zotrvačnosti. Veľkosť uhlového zrýchlenia je definovaná vzťahom $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a $I = ml^2$ je moment zotrvačnosti matematického kyvadla vzhľadom na jeho os. Dosadením do pohybovej rovnice v skalárnom tvare, $M = I\varepsilon$, dostaneme pre matematické kyvadlo

$$-mgl \sin(\varphi) = ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2)$$

Po matematickej úprave pohybová rovnica popisuje časový priebeh výchylky kyvadla v homogénnom gravitačnom poli a má tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0. \quad (3)$$

Rovnica (3) je transcendentná lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou, v ktorej je neznáma funkcia $\varphi(t)$, ktorá popisuje časový priebeh výchylky kyvadla. Prečo je rovnica transcendentálna? Preto, lebo naša neznáma $\varphi(t)$ sa nachádza aj vo funkcii sínus. Prečo je rovnica lineárna? Lebo sa v nej pri neznámych vyskytuje len prvá mocnina. Prečo je rovnica diferenciálna? To je zrejmé. Lebo sa v nej nachádza derivácia. A prečo je rovnica druhého rádu? Lebo najvyššia derivácia, ktorá sa v nej vyskytuje je druhá. A prečo je s konštantnými koeficientami? Lebo vo výrazoch, ktoré obsahujú φ sú okrem neho už len konštanty g a l . Problémom takejto rovnice je však to, že nemá analytické riešenie. V matematike to znamená, že riešenie tejto rovnice sa nedá napísať pomocou známych vzťahov. Rovnica však riešenie má, ale to sa dá nájsť len s použitím numerických metód. Takéto riešenie je však na prácu so známymi vzorcami nevhodné.

V prípade, že kyvadlo vykonáva kmity s malými výchylkami, môžeme urobiť priblíženie $\sin \varphi \cong \varphi$, pretože sínus malého uhla v radiánoch sa približne rovná uhlu samotnému. Napr. uhlu 6° odpovedá uhol $0,104\ 72$ rad a $\sin 0,104\ 72 = 0,104\ 53$. Experimentálne sa môžeme obmedziť na výchylky kyvadla do 10° a za takýchto podmienok rovnica (3) nadobudne tvar pohybovej rovnice pre netlmený kmitavý pohyb

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (4)$$

Rovnica (4) už nie je transcendentná a má analytické riešenie. Riešením tejto rovnice pre začiatočný uhol vychýlenia φ_0 a nulovú začiatočnú rýchlosť je funkcia $\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t)$, kde ω je uhlová rýchlosť kyvadla. Ak si dané riešenie dosadíme

do rovnice (4) zistíme, že uhlová rýchlosť kyvadla nemôže byť ľubovoľná, ale sa musí rovnať $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Takto vyjadrená ω sa nazýva vlastná uhlová rýchlosť kyvadla. Ak použijeme vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a periódou $\omega = \frac{2\pi}{T}$, môžeme periódu kyvadla, ktoré sa správa ako harmonický oscilátor vyjadriť v tvare

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5)$$

Pozn.: S rovnakým typom rovnice, ako je rovnica (3) a s rovnakým postupom jej riešenia sa môžeme stretnúť aj pri iných druhoch kyvadiel ako napr. fyzikálnom kyvadle v laboratórnej úlohe Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla, ... Jediným rozdielom je, že v rovnici sa vyskytujú odlišné fyzikálne veličiny, keďže sa rieši iný fyzikálny problém. Po matematickej stránke však ide o to isté.

Perióda T je dĺžka časového intervalu, za ktorý kmitajúce kyvadlo vykoná jeden kmit (napr. pohyb z jednej krajnej polohy do druhej a naspäť). Ako je vidieť zo vzťahu (5), perióda matematického kyvadla závisí len od jeho dĺžky závesu l a od tiažového zrýchlenia g . Zo vzťahu pre periódu matematického kyvadla vypočítame hodnotu tiažového zrýchlenia

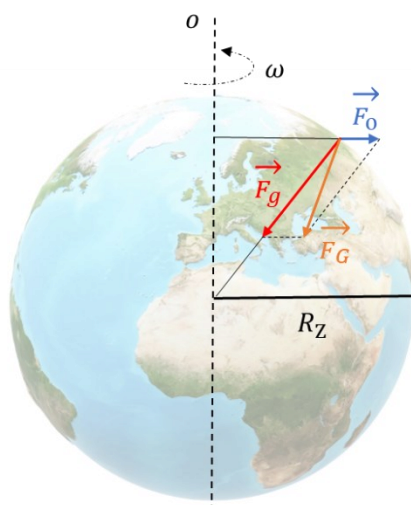
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (6)$$

Veľkosť tiažového zrýchlenia závisí od geografickej polohy. Pri hladine mora v oblasti rovníka je jeho hodnota približne $9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, okolo zemepisných pólův $9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, v ostatných oblastiach medzi týmito krajnými polohami nadobúda hodnotu z uvedeného intervalu, pričom s rastúcou nadmorskou výškou hodnota tiažového zrýchlenia klesá o hodnotu $3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ na jeden meter výšky (za predpokladu, že nadmorská výška telesa je v porovnaní s priemerom Zeme zanedbateľná). Zavedená hodnota normálneho gravitačného zrýchlenia je $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vo vybranej oblasti tiažového poľa sú rozdiely v hodnotách tiažovej sily také malé, že veľkosť aj smer tiažového zrýchlenia g sa považujú za konštantné.

Okolo každého telesa existuje gravitačné pole. Silové pôsobenie medzi telesami prostredníctvom gravitačného poľa je vzájomné. Silové pôsobenie nezávisí od látkového prostredia medzi telesami, ale závisí iba od hmotnosti telies a vzdialenosti medzi nimi. Každé dve telesá sa navzájom priťahujú rovnako veľkými gravitačnými silami opačného smeru $F_{g1} = -F_{g2}$. Veľkosť gravitačnej sily F_g je priamo úmerná súčinu hmotností m_1, m_2 hmotných bodov a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti r

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (7)$$

Univerzálna gravitačná konštanta má hodnotu $\kappa = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Povrch Zeme tvorí s ohľadom na rotáciu Zeme neinerciálnu vzťažnú sústavu, ktorá rotuje uhlovou rýchlosťou. V tejto sústave pôsobí na všetky telesá ležiace pri povrchu Zeme gravitačná sila F_g smerujúca do gravitačného stredu a zotrvačná odstredivá sila F_o smerujúca kolmo od osi rotácie Zeme (Obr. 2). Výslednica určená vektorovým súčtom gravitačnej sily F_g a odstredivej sily F_o sa nazýva **tiažová sila** F_G a platí $F_G = F_g + F_o$. Priestor okolo Zeme, v ktorom sa prejavujú účinky tiažovej sily, sa nazýva **tiažové pole**. Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona je tiažová sila definovaná vzťahom $F_G = mg$. **Tiažové zrýchlenie** g je zrýchlenie telesa, ktoré vo vákuu voľne padá na Zem. Smer tiažovej sily a tiažového zrýchlenia je definovaný ako smer zvislý.



Obr. 2. Tiažová sila ako výslednica gravitačnej a zotrvačnej sily

Predpokladáme, že na matematické kyvadlo pôsobí Zem gravitačnou silou $F_g = \kappa \frac{m M_Z}{R_Z^2}$, kde R_Z je polomer Zeme. V tiažovom poli Zeme sa veľkosť gravitačnej sily približne rovná veľkosti tiažovej sily $F_G = mg$, ktorou Zem k sebe priťahuje kyvadlo. Veľkosť odstredivej sily F_o sa mení so zemepisnou šírkou miesta na povrchu Zeme podľa vzťahu $F_o = ma_d = m\omega^2 r = m\omega^2 R_Z \cos \alpha$, kde r je vzdialenosť miesta na povrchu Zeme od osi otáčania a R_Z polomer Zeme (Obr. 2). Ďalej, keď sa obmedzíme len na malé oblasti na zemskom povrchu a v jeho blízkosti (nadmorská výška $h \ll R_Z$), bude vplyv zotrvačnej odstredivej sily F_o na teleso s hmotnosťou m takmer rovnaký. Veľkosť odstredivej sily F_o je pre malé hmotnosti telies zanedbateľná v porovnaní s hmotnosťou Zeme, t. j. môžeme teda napísať $F_g = F_G$. Nahradením F_g za F_G v rovnici pre gravitačnú silu dostaneme rovnicu $\kappa \frac{m M_Z}{R_Z^2} = mg$ a po matematickej úprave tejto rovnice pre hmotnosť Zeme dostaneme

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{\kappa}. \quad (8)$$

Takýmto spôsobom sme schopní určiť hmotnosť Zeme pomocou matematického kyvadla.

Pomôcky

Matematické kyvadlo, stopky, posuvné meradlo, dĺžkové meradlo.

Pozn.: Na domáci experiment ako teleso môže poslúžiť malý, pomerne ťažký a geometricky symetrický predmet, napríklad malý sklenený pohár s uzáverom. Ako záves môžeme použiť špagát s minimálnou dĺžkou $l = 250$ cm. Uzáver prevrtáme a cez otvor prevlečieme špagát, na konci ktorého urobíme uzol. Pohár naplníme vodou takmer po okraj a vrchnák zaskrutkujeme. Voda v pohári zvyšuje hmotnosť kyvadla a stabilizuje ho pri kmitaní. Druhý koniec špagátu upevníme v dostatočnej výške nad zemou.

A. Meranie tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom

Postup merania

1. Zostavíme meraciu aparatúru podľa obrázku (Obr. 1).
2. Odmeriame dĺžku kyvadla l_i , čo je vzdialenosť od bodu závesu (osi otáčania) po stred gule. Na dosiahnutie najväčšej presnosti odmeriame najskôr priemer gule d posuvným meradlom a potom kolmú vzdialenosť l'_i od bodu uchytenia závesu po horný okraj gule. Potom celkovú dĺžku určíme ako $l_i = l'_i + \frac{d}{2}$
3. Určíme štandardné neistoty merania σ_d a σ_l priemeru gule d_i a dĺžky závesu l_i . Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Kyvadlo by malo kmitať iba v rovine kolmej na vodorovnú rovinu. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov matematického kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 1, kde hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov... Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty získavame pomocou stopiek s medzičasom.

Tabuľka 1.

| d (m) | | l'_i (m) | | l_i (m) | |
|---------|----------------|------------|--------------------|--|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | |
| | | | | $\bar{T} = \dots$ | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ |

- Po určení periódy pre danú dĺžku kyvadlo zastavíme a zmeníme dĺžku závesu.
- Postup vedúci k určeniu periódy matematického kyvadla opakujeme pre 5 rôznych dĺžok závesu a príslušné namerané hodnoty zapisujeme do tabuliek (ich minimálny počet pre toto meranie je päť). Maximálnu dĺžku závesu volíme aspoň dva metre, čím dlhší záves matematického kyvadla zvolíme, tým zvýšime presnosť merania. Minimálna dĺžka by mala byť väčšia ako $5d$. Podmienka minimálnej dĺžky väčšej ako $5d$ je kvôli tomu, že pre menšie dĺžky závesu sa už matematické kyvadlo stáva fyzikálnym kyvadlom.

Vyhodnotenie merania

- Pre každú z piatich dĺžok l_i určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T}_i a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}_i}$.
- Výsledok určenia periód kmitov pre dané dĺžky kyvadla uvádzame v tvare $T_i = (\bar{T}_i \pm \sigma_{\bar{T}_i})$.
- Zostrojíme graf závislosti periódy matematického kyvadla od dĺžky závesu $T = f(l)$. *Pozn.: Nakreslíme graf v príslušnom tabuľkovom procesore (Excel), ktorý zobrazí závislosť periódy T_i od dĺžky závesu l_i . Preložíme päť bodov mocninovou funkciou $y = kx^n$, v našom prípade $T = kl^n$. V Exceli (ktorý by mal imitovať LibreOffice) vytvoríme preloženie kliknutím na bod v grafe pravým tlačidlom na myši. Z ponuky vyberieme „pridať trendovú spojnicu“, z možnosti vyberieme typ spojnice „mocninový“ a zároveň odklikneme možnosť „zobraziť v grafe rovnicu“ a „zobraziť v grafe rovnicu spoľahlivosti R na druhú“. Podľa teórie by najlepšia zhoda mala byť pre mocninovú funkciu, pričom exponent n by mal byť blízko k hodnote 0,5 a R^2 by mal mať hodnotu veľmi blízko k hodnote 1.*
- Z priemerných hodnôt periód \bar{T}_i vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu tiažového zrýchlenia g_i pre dané dĺžky závesu podľa vzťahu

$$g_i = \frac{4\pi^2 l_i}{\bar{T}_i^2}.$$

- Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu g pomocou neistôt priamo meraných veličín T , l a d . Pri odvodení vzťahu na určenie neistoty g vychádzame z predchádzajúceho vzťahu, pričom $l_i = l_i + \frac{d}{2}$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 (\sigma_l)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial d}\right)^2 (\sigma_d)^2},$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 (\sigma_l)^2 + \left(\frac{2\pi^2}{T^2}\right)^2 (\sigma_d)^2}.$$

Určte, ktorá z týchto troch veličín prispieva k výslednej neistote veličiny g najväčšou mierou.

6. Určené výsledky tiažového zrýchlenia uvedieme v tvare $g_i = (\bar{g}_i \pm \sigma_{\bar{g}_i})$.
7. Z vypočítaných piatich hodnôt tiažového zrýchlenia vypočítame priemernú hodnotu \bar{g} a určíme výslednú neistotu ako strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{g}}$.
8. Výsledok merania uvedieme v tvare $g = (\bar{g} \pm \sigma_{\bar{g}})$.
9. Porovnáme náš výsledok merania g s tabuľkovou hodnotou g_t definovanou v našej nadmorskej výške podľa vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|\bar{g} - g_t|}{g_t} 100 \%$$

10. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

B. Určenie hmotnosti Zeme pomocou matematického kyvadla

Postup a vyhodnotenie merania

1. Zostavíme meraciu aparáturu podľa obrázku (Obr. 1).
2. Určíme hodnotu tiažového zrýchlenia podľa postupu uvedeného v úlohe po A. Meranie tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom. Ak sme úlohu realizovali, použijeme výsledok merania z kroku 7 v časti Vyhodnotenie merania.
3. Výpočtom ukážeme, že veľkosť odstredivej sily pôsobiacej na matematické kyvadlo je v porovnaní s veľkosťou gravitačnej sily zanedbateľná. Veľkosť odstredivej sily F_o sa mení so zemepisnou šírkou miesta na povrchu Zeme podľa vzťahu $F_o = m\omega^2 R_Z \cos \alpha$.
4. Vypočítame hmotnosť Zeme M_Z použitím vzťahu (8).
5. Porovnáme výsledok určenej hmotnosti Zeme M_Z s tabuľkovou hodnotou M_{Zt} podľa vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|M_Z - M_{Zt}|}{M_{Zt}} 100 \%$$

6. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

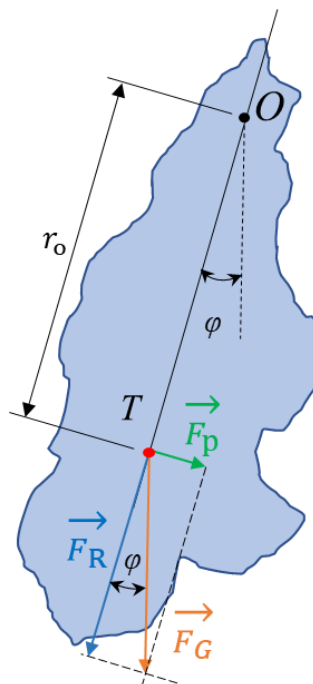
URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Úlohy

- A. Meranie periódy fyzikálneho kyvadla v simulovanom experimente
- B. Určenie periódy fyzikálneho kyvadla pomocou postupnej metódy pre tri osi otáčania a vyjadrenie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania

Teoretický úvod

Fyzikálne kyvadlo je teleso (napr. doska, tyč), ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Ak sa ťažisko nachádza pod osou otáčania, kyvadlo môže zotrvať v stabilnej rovnovážnej polohe. Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy pôsobením vonkajšej sily F , je príčinou pohybu fyzikálneho kyvadla tiažová sila F_G pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol φ do rovnovážnej polohy vracia zložka tiažovej sily F_p (Obr. 1).



Obr. 1. Fyzikálne kyvadlo pri vychýlení o uhol φ

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Moment zotrvačnosti I pre teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou je definovaný vzťahom $I = \int_m r^2 dm$, kde m je hmotnosť telesa a r je vzdialenosť hmotného elementu dm od osi

otáčania. Pre sústavu hmotných bodov je moment zotrvačnosti definovaný vzťahom $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť i -teho hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od osi otáčania.

Kyvadlo znázornené na obrázku (Obr. 1) vykonáva kmitavý pohyb v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákres kyvadla. Veľkosť momentu sily je určená vzťahom

$$M = -F_p r_o = -F_G \sin(\varphi) r_o = -m g r_o \sin(\varphi), \quad (2)$$

kde m je hmotnosť telesa, g je tiažové zrýchlenie a r_o je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej kyvadlo kmitá. Po vychýlení sa kyvadlo snaží dostať naspäť do rovnovážnej polohy, preto sila F_p vždy smeruje do rovnovážnej polohy, čo vo vzťahu vyjadruje znamienko mínus.

Veľkosť uhlového zrýchlenia je určená vzťahom

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m g r_o \sin(\varphi) = 0, \quad (4)$$

ktorá nemá analytické riešenie (str. 58). Pre malé výchylky (do 10°), kedy platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$ a po vydelení rovnice (4) veličinou I , dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m g r_o}{I} \varphi = 0. \quad (5)$$

Rovnica (5) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou a jej riešenie môžeme nájsť v tvare

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania.

Ak urobíme druhú deriváciu funkcie vyjadrenej vzťahom (6) podľa času a túto deriváciu ako i samotnú funkciu popisujúcu okamžitú uhlovú výchylku dosadíme do rovnice (5), zistíme, že $\omega^2 = m g r_o / I$

$$\omega = \sqrt{\frac{m g r_o}{I}}. \quad (7)$$

Veličina ω je tzv. vlastná uhlová rýchlosť kyvadla. Zo známeho vzťahu vyjadrujúceho súvis periódy T a uhlovej rýchlosti hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_0}}, \quad (8)$$

z ktorého pre moment zotrvačnosti vyplýva

$$I = \frac{T^2 mgr_0}{4\pi^2}. \quad (9)$$

Ako je známe z dynamiky tuhého telesa, ak poznáme moment zotrvačnosti rotujúceho telesa vzhľadom na určitú os, môžeme určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na inú os, ktorá je s ňou rovnobežná pomocou tzv. **Steinerovej vety**, ktorá hovorí: Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o mr_0^2 , kde m je hmotnosť telesa a r_0 je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí, t. j.

$$I = I_0 + mr_0^2. \quad (10)$$

A. Meranie periódy fyzikálneho kyvadla v simulovanom experimente

Simulačný program "mKyvadlo" slúži na meranie periódy fyzikálneho kyvadla potrebnej na určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla. Dôležité časti programu sú očíslované (Obr. 2).

Napište Vaše osobné číslo. 1

Hodnoty pre 999104:
 $m = 1.220$ kg
 $a = 0.079$ m
 $b = 0.213$ m

$d01 = 0.050$ m 2
 $d02 = 0.070$ m
 $d03 = 0.040$ m

Výbratá hodnota d0: 0.050 m

Pozn.: 8
 F5 - znovunačítanie stránky,
 CTRL++, CTRL-- a CTRL0 -
 "zoom" stránky.

ŠTART 3 RESET 4
 Start 5 Stop 6

9 5.2, 5.0, 4.9, 4.7, 4.5,
 4.4, 4.2, 4.0, 3.9, 3.7,
 3.6, 3.4, 3.2, 3.1, 2.9,

7

uhol [°]
 čas [s]

Graf znázorňuje priebeh len pre prvé 3 sekundy.

Obr. 2. Snímka obrazovky programu "mKyvadlo"

Postup merania

1. Vyplníte osobné číslo (pod ktorým ste vedený na <http://vzdelavanie.uniza.sk>) a potvrdíte kliknutím na tlačidlo (1).
2. Vygenerované fyzikálne hodnoty pre dané osobné číslo sa zobrazia nižšie.
3. Tlačidlá nazvané "výber" (2) slúžia na výber parametra "d0", ktorý určuje vzdialenosť osi otáčania od ťažiska kmitajúceho telesa (v teórii „d0“ odpovedá hodnote r_0). Po kliknutí na tlačidlo „výber“ je automaticky aktualizovaná pozícia otvoru v kyvadle.
4. Vpravo hore sa nachádzajú tlačidlá "ŠTART" (3), "RESET" (4), "Start" (5) a "Stop" (6). Kliknutím na "ŠTART" sa spustí simulácia, teleso začne kmitať.
5. Meranie času sa vykonáva tlačidlami "Start" a "Stop". Tlačidlo "Start" spúšťa stopky, tlačidlo "Stop" zaznamenáva časový interval, ktorý uplynul od začiatku merania (od stlačenia tlačidla "Start") až po okamih stlačenia tohto tlačidla.
6. Keďže určujeme periódu kmitov kyvadla postupnou metódou, tlačidlo "Stop" sa bude stláčať viackrát. Tým získame sériu medzičasov potrebných na výpočet periódy kmitu kyvadla.
7. V pravom dolnom rohu sa znázorňuje časový priebeh výchylky pre prvé tri sekundy merania, pre hodnotu $d_0 = d_{01}$ (7).
8. Tlačidlo "RESET" slúži na zastavenie kyvadla, vynulovanie a zastavenie stopiek.
9. Hodnoty medzičasov sa zobrazujú po stlačení tlačidla "Stop" pod týmto tlačidlom (9).
10. K referátu je potrebné priložiť celú snímku obrazovky (Obr. 2) obsahujúcu osobné číslo, vygenerované hodnoty, parametre "d0" a zmerané medzičasy. Poznámka: tlačidlo "F5" slúži na opätovné načítanie stránky. Zväčšovanie, zmenšovanie a návrat na pôvodnú veľkosť stránky sa vykonáva stlačením CTRL++, CTRL-- a CTRL0 (8).

B. Určenie periódy fyzikálneho kyvadla pomocou postupnej metódy pre tri osi otáčania a vyjadrenie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania

V laboratórnych podmienkach fyzikálne kyvadlo tvorí homogénna kovová doska, ktorá môže vykonávať kmitavý pohyb okolo jednej zo zvolených osí vytvorených britom, ktorý môžeme zaskrutkovať alebo vložiť do zvoleného otvoru. Os otáčania je vytvorená dotykovým miestom britu na opornej ploche stojana alebo opornej ploche kovovej doky. Toto usporiadanie umožňuje vychýlenie dosky o uhol φ_0 z jej rovnovážnej polohy (Obr. 3), pričom po uvoľnení bude doska kmitať ako fyzikálne kyvadlo. Vložením britu do iného otvoru v doske máme možnosť meniť vzdialenosť osi otáčania dosky od jej ťažiska.

Pomôcky

Kovová doska, stojan, brit, stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, váhy, program na meranie doby kmitu kyvadla.

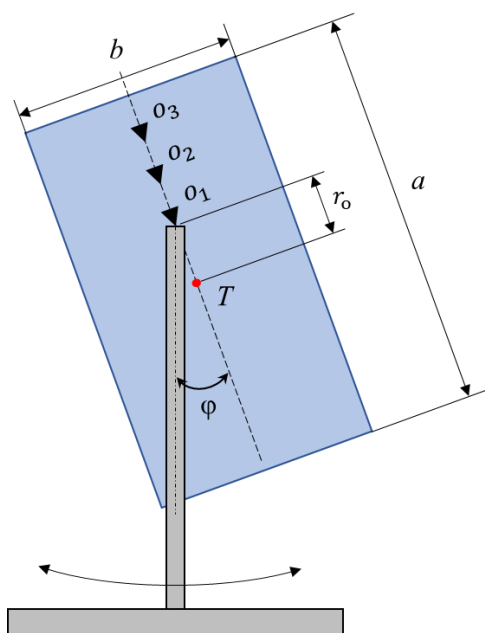
Postup merania

1. Určíme rozmery dosky a , b (v prípade telesa tvaru obdĺžnika) a hmotnosť m fyzikálneho kyvadla. Ak bude brit pevne spojený s kovovou doskou, vážením určíme hmotnosť kovovej dosky aj so skrutkami a britom.
2. Určíme štandardné neistoty merania hmotnosti σ_m a rozmerov dosky σ_a , σ_b , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia, t. j. váh, dĺžkového a posuvného meradla.
3. Zo známej hodnoty hmotnosti m a rozmerov a , b kovovej dosky obdĺžnikového tvaru vypočítame moment zotrvačnosti I_T vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom podľa vzťahu

$$I_T = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2).$$

Pre iný tvar fyzikálneho kyvadla (napr. trojuholník), vypočítame teoretický ťažiskový moment zotrvačnosti I_T podľa vzťahu uvedeného v dodatku laboratórnej úlohy.

4. Vzdialenosť r_o ťažiska od zvolenej osi otáčania (britu) určíme posuvným meradlom, určíme štandardnú neistotu merania σ_{r_o} , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$.
5. Zostavíme meraciu aparatúru podľa obrázku (Obr. 3).



Obr. 3. Meracia aparatúra v laboratórnych podmienkach

6. Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Kyvadlo by malo kmitať iba v rovine kolmej na vodorovnú rovinu. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov fyzikálneho kyvadla. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 1, kde t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď. Podobný zápis urobíme pre zvolené osi č. 2 a č. 3.

Tabuľka 1.

| a (m) | | b (m) | | r_{oi} (m) | | m (kg) | |
|-------------------|----------------|---------|--------------------|--|--|--|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) | |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | | | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | | | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | | | |
| $\bar{T} = \dots$ | | | | | | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ | |

7. Po určení periódy pre danú vzdialenosť osi otáčania od ťažiska kyvadlo zastavíme a zmeníme túto vzdialenosť umiestnením britu do ďalšieho zvoleného otvoru.
8. Postup vedúci k určeniu periódy fyzikálneho kyvadla opakujeme pre 3 rôzne osi otáčania a príslušné namerané hodnoty zapisujeme do tabuliek, budeme mať tri tabuľky.

Vyhodnotenie merania

- Pre každú z troch osí otáčania určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T}_i a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}_i}$.
- Výsledok určenia periód kmitov pre dané osi otáčania kyvadla uvádzame v tvare $T_i = (\bar{T}_i \pm \sigma_{\bar{T}_i})$.
- Z priemerných hodnôt periód \bar{T}_i vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu momentu zotrvačnosti I_i pre dané vzdialenosti r_{oi} ťažiska od osi otáčania podľa vzťahu (9).
- Využitím Steinerovej vety vypočítame moment zotrvačnosti I_o vzhľadom na ťažiskovú os podľa vzťahu

$$I_o = I - mr_o^2 = \frac{T^2 mgr_o}{4\pi^2} - mr_o^2.$$

Výsledky získané podľa uvedeného vzťahu vyhodnotíme pre každú os otáčania

$$I_{o1} = I_1 - mr_{o1}^2, \quad I_{o2} = I_2 - mr_{o2}^2, \quad I_{o3} = I_3 - mr_{o3}^2.$$

5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu k momentom zotrvačnosti I_{o1}, I_{o2}, I_{o3} pomocou neistôt priamo meraných veličín T, m, r_o podľa vzťahu

$$\sigma_{I_o} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_o}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial I_o}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial I_o}{\partial r_o}\right)^2 (\sigma_{r_o})^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial I_o}{\partial T} = \frac{Tmgr_o}{2\pi^2}, \quad \frac{\partial I_o}{\partial m} = \frac{r^2gr_o}{4\pi^2} - r_o^2, \quad \frac{\partial I_o}{\partial r_o} = \frac{r^2mg}{4\pi^2} - 2mr_o.$$

6. Určíme, ktorá z týchto troch veličín (T, m, r_o) prispieva k výslednej neistote veličiny I_o najväčšou mierou, t. j. ktorý z troch sčítancov v rovnici je najväčší.
7. Určené výsledky momentu zotrvačnosti uvedieme v tvare $I_{oi} = (\bar{I}_{oi} \pm \sigma_{\bar{I}_{oi}})$.
8. Zistíme, či vypočítané hodnoty I_{o1}, I_{o2}, I_{o3} navzájom súhlasia, t. j. porovnáme každú z troch dvojíc podľa kritéria pre porovnávanie, kapitola Spracovanie merania. Ak súhlasia tri dvojice, nájdeme vážený priemer zo všetkých troch hodnôt, ak súhlasí len jedna dvojica, nájdeme vážený priemer len z tejto dvojice podľa vzťahu

$$\bar{I}_o = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{I_{oi}}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}$$

a neistotu váženého priemeru podľa vzťahu

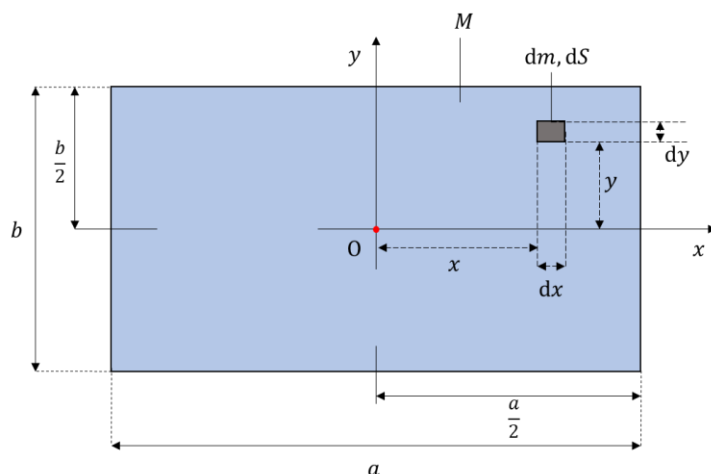
$$\sigma_{\bar{I}_o} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}}.$$

9. Porovnaním zistíme, či vypočítaná hodnota váženého priemeru momentu zotrvačnosti \bar{I}_o súhlasí s teoretickou hodnotou I_T , kapitola Spracovanie merania. Ak nie, uvažujeme nad príčinou.
10. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

C. Odvodenie vzťahu pre moment zotrvačnosti

Moment zotrvačnosti pre dosku tvaru obdĺžnika

Odvodíme vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky obdĺžnikového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá. Uvažovanú dosku orientujeme vzhľadom na súradnicovú sústavu (Obr. 4).



Obr. 4. Grafické znázornenie homogénnej dosky pre odvodenie momentu zotrvačnosti

V našom prípade os, voči ktorej moment zotrvačnosti I_0 určujeme, je totožná s osou z (t. j. je kolmá na náčrtu). Moment zotrvačnosti pre štvrt dosky (časť nachádzajúca sa v prvom kvadrante) vyjadríme podľa definície nasledovne

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{4} &= \int_M r^2 dm, \\ \frac{I_0}{4} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \frac{M}{S} dS = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \frac{M}{ab} dx dy \\ &= \frac{M}{ab} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{I_0}{4} = \frac{1}{48} M(a^2 + b^2).$$

Pre plošnú hustotu sme použili vzťah $\rho_S = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS} = \frac{dm}{dx dy}$ a z neho sme vyjadrili hmotnosť nekonečne malého elementu dm . Plocha tohto elementu je $dS = dx dy$ a jeho poloha vzhľadom na uvažovanú os je $r^2 = x^2 + y^2$. Rozmery celej dosky sú dané stranami a , b . Hľadaný moment zotrvačnosti potom bude

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2), \quad (12)$$

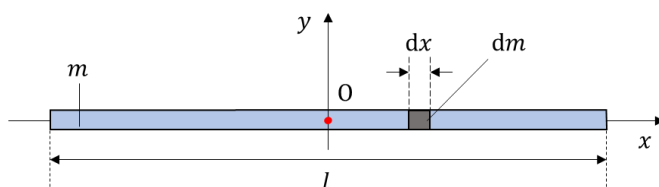
kde M je hmotnosť dosky a a , b jej rozmery.

Moment zotrvačnosti pre dosku trojuholníkového tvaru

Odvodíme si vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky trojuholníkového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá. Na označenie hustoty trojuholníkovej dosky použijeme ρ a budeme predpokladať, že táto hustota je jednotná v celom objekte.

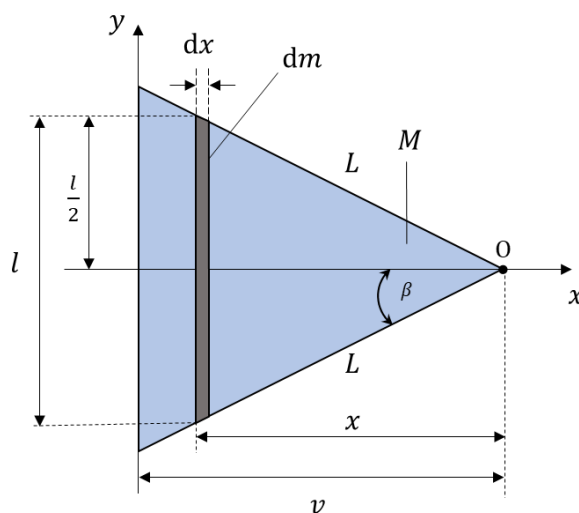
Najskôr si vyjadríme moment zotrvačnosti I_0 tenkej rovnorodej tyče hmotnosti m , dĺžky l pre os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom (Obr. 5.). Pre hustotu platí $\rho = \frac{m}{l}$ (lineárna hustota), $dm = \rho dx$.

$$I_0 = \int_m x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho l^3 = \frac{1}{12} ml^2 \quad (13)$$



Obr. 5. Grafické znázornenie homogénnej tyče pre odvodenie momentu zotrvačnosti

V ďalšom budeme uvažovať rovnoramenný trojuholník s hmotnosťou M , s vrcholovým uhlom veľkosti 2β a dĺžkou ramien L . Trojuholník orientujeme vzhľadom na súradnicovú sústavu xy . Os, voči ktorej moment zotrvačnosti I určujeme, je rovnobežná s osou z , t. j. os je kolmá na rovinu nákresu a prechádza vrcholom O trojuholníka (Obr. 6.).



Obr. 6. Grafické znázornenie homogénnej trojuholníkovej dosky pre odvodenie momentu zotrvačnosti

Nech v je výška trojuholníka, pre ktorú platí $v = L \cos \beta$. Rozdelíme si trojuholník na tenké rovnorodé pásy rovnobežné so základňou a nech x je vzdialenosť od pásu k vrcholu O . Výška vybraného elementárneho pásu trojuholníka je $l = 2x \tan \beta$ a jeho šírka je dx . Elementárna

plocha dS elementárneho pásu sa preto vypočíta ako $dS = l dx = (2x \tan \beta) dx$. Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na ľubovoľnú os sa vypočíta podľa definície nasledovne

$$I = \int_m x^2 dm. \quad (14)$$

Tento matematický zápis integrálu znamená, že musíme sčítať všetky elementárne body telesa s hmotnosťami dm vynásobené druhou mocninou ich vzdialenosti od osi otáčania. Skôr ako budeme integrovať, je potrebné všetky veličiny pod integrálom vyjadriť pomocou jednej rovnakej veličiny, inak tento integrál nevieme vyriešiť. V našom prípade to znamená, hmotnosť vyjadriť pomocou vzdialenosti x .

Trojuholník, ktorého moment zotrvačnosti počítame, predstavuje zložitý útvar z hľadiska integrovania a výpočtu, preto pri riešení použijeme Steinerovu vetu. Jej diferenciálny zápis pre daný trojuholník je

$$dI = dI_o + x^2 dm, \quad (15)$$

kde dI je diferenciál momentu zotrvačnosti nášho homogénneho pásika vzhľadom na os prechádzajúcu bodom O , dI_o je diferenciál momentu zotrvačnosti homogénneho pásika (tyče) vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom pásika (vypočítané na začiatku kapitoly, vzťah 13) a x je vzdialenosť ťažiska pásika od bodu O . Ak zderivujeme moment zotrvačnosti homogénnej tyče podľa m dostaneme

$$\frac{dI_o}{dm} = \frac{l^2}{12}, \quad (16)$$

z čoho sa dá dI_o vyjadriť v tvare

$$dI_o = \frac{l^2}{12} dm. \quad (17)$$

Ak si dI_o dosadíme do Steinerovej vety v diferenciálnom tvare dostaneme

$$dI = \frac{l^2}{12} dm + x^2 dm \quad (18)$$

a po dosadení za l dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$dI = \frac{(2x \tan \beta)^2}{12} dm + x^2 dm, \quad (19)$$

ktorú vyriešime tak, že obidve strany rovnice integrujeme a dostaneme

$$I = \int_M \left(\frac{(2x \tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) dm. \quad (20)$$

Pre vyjadrenie elementárnej hmotnosti dm v integráli pomocou x použijeme plošnú hustotu rovnorodého telesa $\rho = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS}$, kde M je celková hmotnosť telesa, S je celková plocha telesa, dS je elementárna plocha rovnorodého pásika, ktorá sa rovná $l dx$. Dosadením za l a vyjadrením elementárnej hmotnosti pomocou ρ dostaneme $dm = \rho(2x \tan \beta) dx$. Ak si do integrálu (vzťah 20) dosadíme za dm , dostaneme

$$I = \int_0^v \left(\frac{(2x \tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) (\rho 2x \tan \beta dx). \quad (21)$$

V tomto integráli sú vyjadrené všetky meniace sa fyzikálne veličiny vo výpočte momentu zotrvačnosti iba pomocou dĺžky x , ktorá sa mení od 0 po v . Tento integrál sa dá postupnými matematickými úpravami vypočítať nasledovne

$$\begin{aligned} I &= 2\rho \tan \beta \int_0^v \left(\frac{4x^2 (\tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) x dx = 2\rho \tan \beta \int_0^v \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) x dx \\ &= 2\rho \tan \beta \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) \frac{v^4}{4}. \end{aligned} \quad (22)$$

Výsledný vzťah sa dá zapísať aj pomocou celkovej hmotnosti M trojuholníka a dĺžky jeho strany L nasledovnou úpravou. Pre plochu trojuholníka S s ohľadom na uhol β platí $S = \frac{v(2v \tan \beta)}{2} = v^2 \tan \beta$ a s ohľadom na skutočnosť, že $\rho = \frac{M}{S}$, potom pre I platí

$$I = \rho S \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) \frac{v^2}{2} = \left(\frac{Mv^2}{2} \right) \left[1 + \frac{1}{3} (\tan \beta)^2 \right]. \quad (23)$$

Ak si vyjadríme výšku trojuholníka prostredníctvom strany trojuholníka $v = L \cos \beta$ a dosadíme do vzťahu (23), bude platiť

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{ML^2 (\cos \beta)^2}{2} \right] \left[1 + \frac{1}{3} (\tan \beta)^2 \right] = \\ &= \frac{ML^2}{2} \left[(\cos \beta)^2 + \frac{1}{3} \frac{(\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} (\cos \beta)^2 \right] = \frac{ML^2}{2} \left[(\cos \beta)^2 + \frac{1}{3} (\sin \beta)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Po úprave využitím vzťahu medzi goniometrickými funkciami rovnakého uhla ($\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$) dostaneme vzťah pre moment zotrvačnosti rovnoramenného trojuholníka vzhľadom na os prechádzajúcu jeho vrcholom v tvare

$$I = \frac{ML^2}{2} \left[1 - \frac{2}{3} (\sin \beta)^2 \right]. \quad (25)$$

Pre rovnostranný trojuholník je vrcholový uhol rovný 60° . S ohľadom na túto vlastnosť, ak zadefinujeme uhol $\beta = 30^\circ$, dostaneme pre moment zotrvačnosti rovnostranného trojuholníka vzťah

$$I = \frac{5}{12} ML^2. \quad (26)$$

V tomto kroku použijeme Steinerovu vetu (vzťah 10), aby sme si vyjadrili moment zotrvačnosti I_T vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom. V nasledujúcej rovnici za moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom dosadíme vzťah (26) a za r_0 vzájomnú vzdialenosť oboch spomínaných osí, t. j. $\frac{2}{3}v$, pričom platí $v^2 = \frac{3}{4}L^2$.

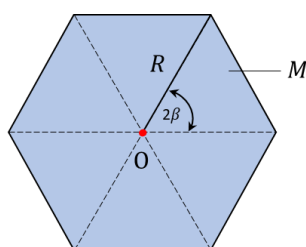
$$\begin{aligned} I &= I_T + mr_0^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \left(\frac{2}{3} v \right)^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \frac{4}{9} v^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 4} L^2, \\ I_T &= \frac{1}{12} ML^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Pre moment zotrvačnosti rovnostranného trojuholníka vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a kolmú na rovinu trojuholníka platí vzťah

$$I = \frac{1}{12} ML^2. \quad (28)$$

Moment zotrvačnosti pre dosku tvaru pravidelného N-uholníka

Odvodíme si vzťah pre rovinný pravidelný mnohoúhelník s N vrcholmi a s rovnomerne rozloženou hmotnosťou M , ktorý rotuje okolo osi kolmej na rovinu mnohoúhelníka a idúcou stredom. R je polomer opísanej kružnice mnohoúhelníka. N-uholník sa skladá z rovnoramenných trojuholníkov (Obr. 7.), takže môžeme použiť niektoré skutočnosti z odvodenia momentu zotrvačnosti pre trojuholník.



Obr. 7. Grafické znázornenie homogénnej dosky tvaru N-uholníka pre odvedenie momentu zotrvačnosti

V N-uholníku bude pre uhol platiť

$$\beta = \frac{\pi}{N}. \quad (29)$$

Hmotnosti trojuholníkov sa jednoducho sčítajú, takže ak M je hmotnosť celého N-uholníka, dostaneme použitím vzťahu (25) vzťah pre ťažiskový moment zotrvačnosti pravidelného N-uholníka s osou kolmou na jeho rovinu v tvare

$$I = \frac{MR^2}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\sin \frac{\pi}{N} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Pre pravidelný 6-uholník, s ktorým sa stretáme pri meraní je $\beta = \frac{\pi}{6}$. Jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a kolmú na rovinu N-uholníka je daný

$$I = \frac{5}{12} MR^2. \quad (31)$$

V prílohe (tabuľka 14, strana 162) uvádzame ďalšie hodnoty momentov zotrvačnosti pre niekoľko N-uholníkov odvodených z rovnice (30).

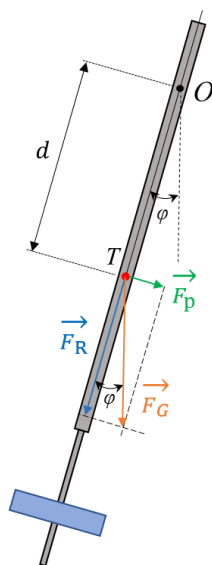
URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM

Úlohy

A. Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia v mieste fyzikálneho laboratória

Teoretický úvod

Vo fyzike sa pojem kyvadlo používa veľmi často. Má niekoľko prívlastkov ako matematické, torzné, fyzikálne alebo reverzné. **Reverzné kyvadlo** je špeciálnym druhom fyzikálneho kyvadla, ktoré je schopné konať kmitavý pohyb okolo dvoch osí (asymetricky uložených vzhľadom na ťažisko kyvadla), pričom perióda kmitania okolo jednej osi je rovnaká ako okolo druhej osi. Fyzikálne kyvadlo je teleso, ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy pôsobením vonkajšej sily F , je príčinou pohybu fyzikálneho kyvadla tiažová sila F_G pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol φ do rovnovážnej polohy vracia zložka tiažovej sily F_p (Obr. 1).



Obr. 1. Fyzikálne kyvadlo upravené konkrétnym spôsobom pri vychýlení o uhol φ

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Nech kyvadlo vykonáva kmitavý pohyb v rovine nákrese okolo osi O kolmej na nákreš kyvadla (Obr. 1.). Veľkosť momentu sily F_p je určená vzťahom

$$M = -F_p d = -F_G \sin(\varphi) d = -mgd \sin(\varphi), \quad (2)$$

kde m je hmotnosť telesa, g je veľkosť tiažového zrýchlenia a d je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej kyvadlo kmitá. Po vychýlení sa kyvadlo snaží dostať naspäť do rovnovážnej polohy, preto sila F_p vždy smeruje do rovnovážnej polohy, čo vo vzťahu vyjadruje znamienko mínus. Veľkosť uhlového zrýchlenia je určená vzťahom

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgd \sin(\varphi) = 0, \quad (4)$$

ktorá nemá analytické riešenie. Pre malé výchylky (do 10°), kedy platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$ a vydelením rovnice (4) veličinou I , dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \varphi = 0, \quad (5)$$

čo je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou a jej riešenie môžeme nájsť v tvare

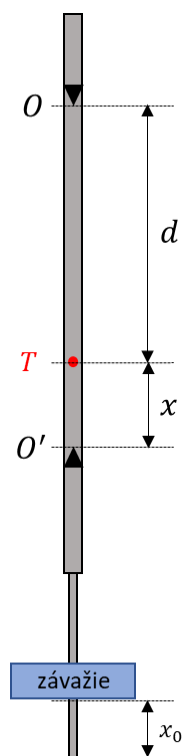
$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Ak urobíme druhú deriváciu funkcie vyjadrenej vzťahom (6) podľa času a túto deriváciu ako i samotnú funkciu popisujúcu okamžitú uhlovú výchylku dosadíme do rovnice (5), zistíme, že $\omega^2 = mgd/I$, z čoho

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \quad (7)$$

Veličina ω je tzv. vlastná uhlová rýchlosť kyvadla (frekvencia). Zo známeho vzťahu vyjadrujúceho súvis periódy T a uhlovej rýchlosti hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah pre periódu kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (8)$$



Obr. 2. Grafický model reverzného kyvadla

V tejto úlohe si ukážeme, ako sa dá využitím fyzikálneho kyvadla, ktoré je upravené určitým spôsobom, určiť tiažové zrýchlenie (zrýchlenie voľného pádu). Predstavme si fyzikálne kyvadlo upravené určitým spôsobom (Obr. 2.). Položme si otázku, či sa môže takéto kyvadlo kývať s rovnakou periódou T okolo osi O a aj okolo osi O' , ktorá sa nachádza na opačnej strane od ťažiska. Pre prípad reverzného kyvadla, schematicky naznačeného na obrázku (Obr. 2), ako už bolo spomenuté, platí, že perióda kmitania okolo jednej osi O je rovnaká ako okolo druhej osi O' . Čiže pre periódou T' kyvadla vzhľadom na os O' platí analogický vzťah ako pre periódou T

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgx}}, \quad (9)$$

kde I' je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os O' a x je vzdialenosť tejto osi od ťažiska T (Obr. 2.). Ak požadujeme, aby tieto periódou boli rovnaké, musí platiť $T = T'$ a po dosadení vzťahu (8) a (9) do tejto rovnosti a po matematickej úprave dostaneme

$$\frac{I}{d} = \frac{I'}{x}. \quad (10)$$

Použitím Steinerovej vety, ktorá hovorí: Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu

ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o mr_0^2 , kde m je hmotnosť telesa a r_0 je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí, pre momenty zotrvačnosti I a I' platí

$$\begin{aligned} I &= I_0 + md^2, \\ I' &= I_0 + mx^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Po dosadení vzťahov (11) do vzťahu (10) dostávame rovnosť

$$\frac{I_0 + md^2}{d} = \frac{I_0 + mx^2}{x}, \quad (12)$$

odkiaľ po matematickej úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$mdx^2 - (I_0 + md^2)x + I_0d = 0. \quad (13)$$

Táto rovnica poskytuje pre x nasledovné dve riešenia

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{I_0}{md}, \\ x_2 &= d. \end{aligned} \quad (14)$$

Z riešenia kvadratickej rovnice vidíme, že pre príslušné kyvadlo existujú na druhej strane ťažiska dve osi, okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou ako okolo osi O . Jedna je symetricky a druhá nesymetricky položená voči osi O vzhľadom na ťažisko. Riešenie $x_2 = d$ určuje polohu symetricky položenej osi. Riešenie $x_1 = I_0/md$ určuje polohu nesymetricky položenej osi. Vzájomnú vzdialenosť osi O a nesymetricky položenej osi O' (okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou) nazývame redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla, pre ktorú platí

$$l_r = d + \frac{I_0}{md} = \frac{md^2 + I_0}{md} = \frac{I}{md}. \quad (15)$$

Ak vzťah (15) dosadíme do vzťahu (8), pre periódu fyzikálneho kyvadla dostaneme

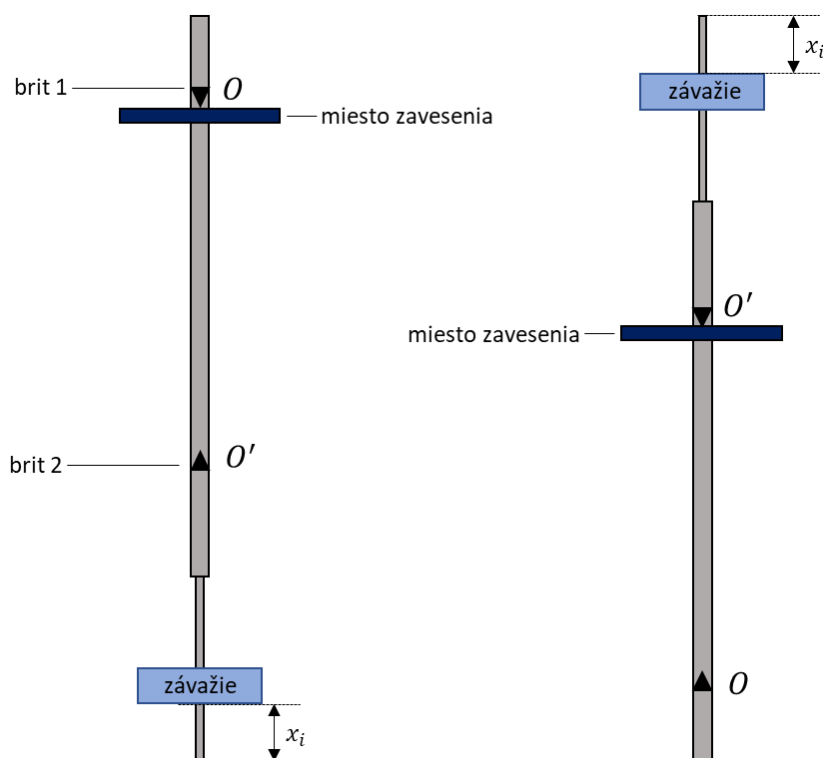
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (16)$$

Zo vzťahu (16) môžeme vyjadriť tiažové zrýchlenie v tvare

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2}. \quad (17)$$

Vzťah (17) umožňuje určiť tiažové zrýchlenie g , ak poznáme redukovanú dĺžku l_r a periódu T použitého kyvadla.

Kyvadlo, ktoré má vyššie popísané vlastnosti, nazývame **reverzné kyvadlo**. Reverzné kyvadlo je tyč s dvomi osami s britmi obrátenými proti sebe (Obr. 3.). Na jednom konci tyče je posúvateľné závažie, ktoré spôsobuje, že osi O a O' sú vzhľadom na ťažisko T nesymetricky položené. Posúvaním tohto závažia na vhodné miesto a jeho zafixovaním (fixačnou skrutkou) môžeme dosiahnuť, aby perióda kyvadla bola vzhľadom na osi O a O' rovnaká. Potom vzdialenosť $\overline{OO'}$ (čo je vzdialenosť britov) je redukovaná dĺžka l_r reverzného kyvadla.



Obr. 3. Spôsoby zavesenia reverzného kyvadla

A. Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia v mieste fyzikálneho laboratória

Pomôcky

Reverzné kyvadlo, stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo.

Postup merania

1. Posúvateľné závažie nastavíme do polohy x_1 (napr. 1 cm) a odmeriame stopkami dobu kmitov desiatich periód $10T$ okolo osi O .
2. Po zavesení kyvadla na druhý brit podobne zmeriame dobu kmitov desiatich periód $10T'$, kyvadlo sa kýva okolo osi O' (Obr. 3.).

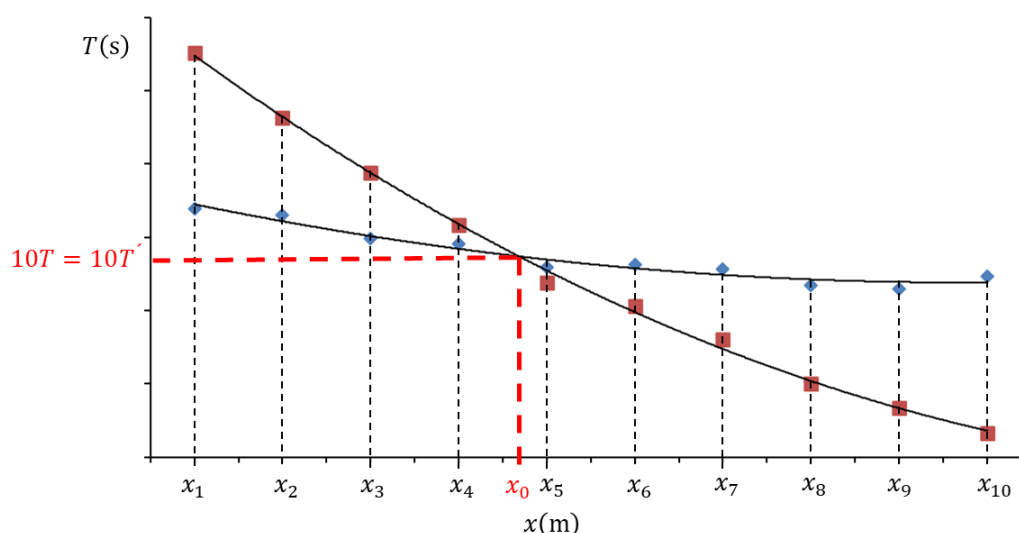
3. Postup opakujeme pre ďalšie polohy posúvateľného závažia, napr. x_2 (napr. 3 cm), x_3 (napr. 5 cm), x_4 (napr. 7 cm), ... a hodnoty zapisujeme do tabuľky 1 s presnosťou na najmenší dielik.

Tabuľka 1.

| i | 1 | 2 | 3 | ... | n |
|--------------|---|---|---|-----|---|
| x_i (m) | | | | | |
| $10T_i$ (s) | | | | | |
| $10T'_i$ (s) | | | | | |

4. Získané hodnoty doby kmitov $10T$ a $10T'$ pre rôzne polohy x_i vynesieme do grafu (Obr. 4.), preložíme regresiou kvadratického polynómu (pretože teoretická závislosť je parabolická). To urobíme pre konfiguráciu so závažím hore aj dole a určíme priesečník kriviek graficky alebo vypočítaním pomocou regresných koeficientov.

Pozn.: Nakreslíme graf v príslušnom tabuľkovom procesore Excel, ktorý zobrazí závislosť periódy T_i od polohy závažia x_i . Bodmi preložíme polynomickeú funkciu druhého stupňa $y = ax^2 + bx + c$. V Exceli (ktorý by mal imitovať LibreOffice) vytvoríme preloženie kliknutím na bod v grafe pravým tlačidlom na myši. Z ponuky vyberieme „pridať trendovú spojnicu“, z možnosti vyberieme typ spojnice „polynomickeá“, stupeň 2 a zároveň odklikneme možnosť „zobraziť v grafe rovnicu“.



Obr. 4. Závislosť doby kmitu T od vzdialenosti x vzhľadom na os O a O'

5. Z takto zostrojeného grafu určíme polohu x_0 posúvateľného závažia (Obr. 2.), ktorá zodpovedá prípadu, keď $10T = 10T'$, t. j. keď perióda okolo obidvoch osí O a O' je rovnaká.

6. Po nastavení závažia na túto hodnotu polohy x_0 experimentálne overíme súhlas $10T$ a $10T'$ okolo obidvoch osí. Ak je rozdiel týchto dvoch hodnôt väčší ako 0,09 s, posúvateľné závažie jemne posunieme (približne o 0,5 cm) na jednu alebo druhú stranu okolo polohy x_0 . Postup opakujeme.
7. Určíme štandardnú neistotu redukovanej dĺžky σ_{l_r} , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia, t. j. dĺžkového meradla.
8. Po získaní rovnosti $10T = 10T'$ vykonáme meranie periódy okolo jednej z osí postupnou metódou. Odporúčame vzdialenejšiu os O od ťažiska kyvadla (Obr. 3.) a namerané hodnoty zaznamenávame do tabuľky 2.
9. Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2, kde údaj t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 2.

| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) |
|-----|----------------|---------|--------------------|--|--|
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | |
| | | | | $\bar{T} = \dots$ | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$.
2. Výsledok určenia periódy kmitov kyvadla uvádzame v tvare $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}})$.
3. Hodnotu tiažového zrýchlenia určíme podľa vzťahu (17), do ktorého dosadíme nameranú hodnotu redukovanej dĺžky l_r (vzdialenosť britov) a priemernú hodnotu periódy \bar{T} , t. j.

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l_r}{\bar{T}^2}.$$

4. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu $\sigma_{\bar{g}}$ pomocou neistôt priamo meraných veličín \bar{T} , l_r podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{T}}\right)^2 \sigma_{\bar{T}}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l_r}\right)^2 \sigma_{l_r}^2.}$$

5. Určíme, ktorá z týchto veličín (\bar{T} , l_r) prispieva k výslednej neistote veličiny g najväčšou mierou, t. j. ktorý z dvoch sčítancov v rovnici je najväčší.
6. Výsledok merania tiažového zrýchlenia uvedieme v tvare $g = (\bar{g} \pm \sigma_{\bar{g}})$.
7. Určenú hodnotu tiažového zrýchlenia porovnáme s vypočítanou hodnotou, určenou pre konkrétnu polohu „Žilina“ (uhol a nadmorskú výšku určíme kartograficky). Hodnoty stredného polomeru a hmotnosti Zeme použijeme z tabuliek.
8. Ak ste absolvovali meranie v úlohe s názvom Matematické kyvadlo, potom porovnajte určenú hodnotu tiažového zrýchlenia v tejto úlohe s experimentálne určenou hodnotou tiažového zrýchlenia v úlohe s matematickým kyvadlom.
9. V závere zistite, ktorá z metód na určenie tiažového zrýchlenia je presnejšia.

URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI TORZNÝM KYVADLOM

Úlohy

A. Experimentálne určenie hodnoty momentu zotrvačnosti neznámeho telesa

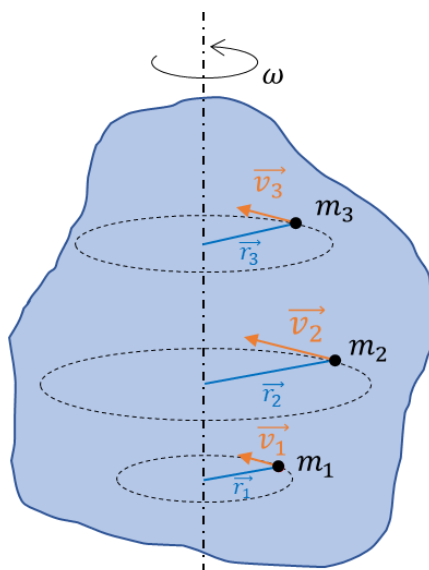
Teoretický úvod

Telesá sa vždy snažia zachovávať svoj pohybový stav. Túto schopnosť telies charakterizujeme zotrvačnou hmotnosťou pri translačnom, čiže posuvnom pohybe a momentom zotrvačnosti pri rotačnom pohybe. Moment zotrvačnosti má tiež svoj pôvod v zotrvačnej hmotnosti, ale navyše sa tu uplatní aj jej rozloženie okolo osi rotácie. Vysvetlíme si to na kinetickej energii rotujúceho telesa.

Pri posuvnom pohybe telesa opisujú všetky body tuhého telesa rovnaké trajektórie a v každom okamihu majú rovnakú rýchlosť. To znamená, že kinetická energia telesa s hmotnosťou m pohybujúceho sa rýchlosťou v je určená vzťahom $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Pri rotačnom, t. j. otáčavom pohybe telesa okolo nehybnej osi, všetky body, teda aj ťažisko, vykonávajú pohyb po kružnici so stredom na osi otáčania (Obr. 1). Uhol otočenia φ , uhlová rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ε sú kinematické veličiny, ktoré charakterizujú rotáciu telesa. Rotujúce teleso považujeme za sústavu pohybujúcich sa častíc s rôznymi rýchlosťami. Rotačnú energiu môžeme potom vypočítať ako súčet kinetickej energie jednotlivých častíc

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_iv_i^2, \quad (1)$$

kde m_i je hmotnosť a v_i je rýchlosť každej i -tej častice.



Obr. 1. K odvodu vzťahu pre kinetickú energiu rotujúceho telesa a momentu zotrvačnosti

Častice sa pohybujú rôznymi rýchlosťami aj rôznym smerom, keďže ide o rotačný pohyb (Obr. 1). Vyjadríme si rýchlosť každej častice pomocou uhlovej rýchlosti, pomocou ktorej vieme charakterizovať otáčavý pohyb vzťahom $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Keďže uhlová rýchlosť je konštantná vo všetkých častiach telesa a vektor \mathbf{r} charakterizujúci vzdialenosť otáčania elementu telesa od osi otáčania je kolmý na vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$, veľkosť obvodovej rýchlosti i -tej častice telesa môžeme vyjadriť vzťahom $v_i = r_i \omega$. Rýchlosť jednotlivých bodov telesa je priamo úmerná polomeru kružníc, po ktorých sa jednotlivé body pohybujú, t. j. $v_1 = r_1 \omega$, $v_2 = r_2 \omega$, ..., $v_n = r_n \omega$. Potom kinetickú energiu E_k telesa rotujúceho uhlovou rýchlosťou ω vzhľadom na nehybnú os otáčania určíme ako súčet kinetických energií jednotlivých bodov nasledovne

$$E_k = m_1 r_1^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2. \quad (2)$$

Výraz $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ predstavuje fyzikálnu veličinu **moment zotrvačnosti** I

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (3)$$

kde m_i je hmotnosť i -tej častice telesa a r_i polomer otáčania i -tej častice telesa (Obr. 1). Jednotka momentu zotrvačnosti je $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Moment zotrvačnosti I pre teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou je definovaný vzťahom

$$I = \int_m r^2 dm, \quad (4)$$

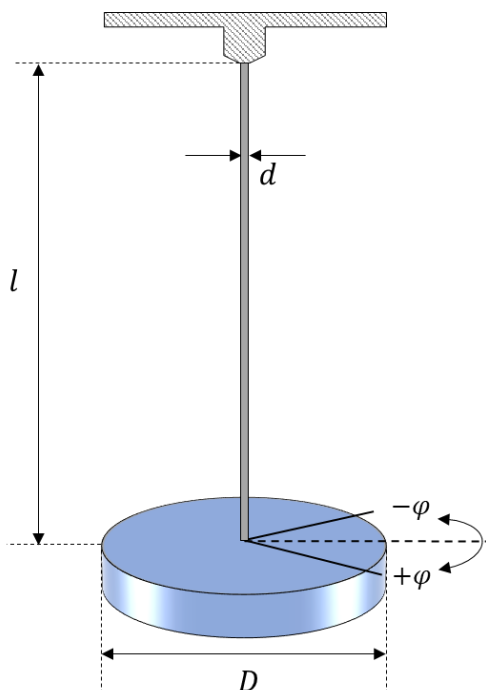
kde m je hmotnosť telesa a r je vzdialenosť hmotného elementu dm od osi otáčania. Moment zotrvačnosti I je fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje mieru zotrvačných vlastností telesa pri jeho otáčavom pohybe.

Ako vyplýva zo vzťahu (3), moment zotrvačnosti je veličina aditívna, čo znamená, že ak spojíme teleso, ktoré má napr. moment zotrvačnosti I_1 s telesom s momentom zotrvačnosti I_2 tak, aby sa príslušné osi rotácie, na ktoré sa tieto veličiny vzťahujú stotožnili, bude výsledný moment zotrvačnosti daný ich súčtom a vo všeobecnosti platí

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (5)$$

Táto skutočnosť sa častokrát využíva pri určovaní momentu zotrvačnosti rôznych symetrických telies, pri ktorých by výpočet momentu zotrvačnosti bol komplikovaný. Ukážeme si, ako môžeme torzné kyvadlo použiť na určenie momentu zotrvačnosti telies, pri ktorých je veľmi

ťažké zistiť moment zotrvačnosti výpočtom. Pri našom meraní použijeme najskôr teleso, pri ktorom je výpočet momentu zotrvačnosti jednoduchý, napríklad kruhovú dosku. Pod torzným kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku) upevnené v jeho strede na zvislom pružnom vlákne tak, že os súmernosti je totožná s osou vlákna (Obr. 2).



Obr. 2. Grafické znázornenie pohybu torzného kyvadla

Kyvadlo uvedieme do pohybu z jeho rovnovážnej polohy otočením o uhol φ (uhol pootočenia). Po uvoľnení sa teleso otáča okolo osi drôtu. Tento pohyb je vyvolaný torznými silami, ktorých pôvod je v deformácii vlákna. Podľa **Hookeovho zákona**, je moment týchto síl M v každom okamihu úmerný okamžitej výchylke φ vzhľadom na os otáčania (v hraniciach pružnej deformácie). Torzné sily pôsobia proti výchylke, moment torzných síl má opačné znamienko ako výchylka, ktorá ho vyvolala a platí

$$M = -M_0\varphi, \quad (6)$$

kde M_0 je konštanta úmernosti a nazýva sa direkčný moment závesu alebo torzná tuhosť. Jej fyzikálny význam spočíva v tom, že predstavuje moment sily potrebný na vytočenie závesu o jednotkový uhol. Závisí len od elastických vlastností závesu (modulu pružnosti v šmyku G materiálu závesu) a geometrických rozmerov. Použitím teórie mechanických vlastností látok je možné výpočtom ukázať, že torzná tuhosť pre vlákno kruhového prierezu priemeru d a dĺžky l má hodnotu

$$M_0 = \frac{\pi G d^4}{32l}, \quad (7)$$

kde G je modul pružnosti v šmyku materiálu, z ktorého je zhotovené vlákno, d je priemer a l je dĺžka vlákna.

Ak teleso zavesené na skrútenom vlákne pustíme, budú ho torzné sily skrúteného drôtu vracaf do rovnovážnej polohy a teleso sa rozkmitá rotačnými (torznými) kmitmi okolo osi symetrie idúcej osou periodicky skrúcajúceho sa drôtu. Pohybová rovnica torzného kyvadla má tvar pohybovej rovnice telesa konajúceho rotačný pohyb okolo pevnej osi

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu síl spôsobujúci otáčavý pohyb okolo pevnej osi a I moment zotrvačnosti zaveseného telesa vzhľadom na os vlákna. Moment zotrvačnosti vlákna je veľmi malý a môžeme ho zanedbať. Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ nazývame vektor uhlového zrýchlenia a jeho veľkosť je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (9)$$

Keď pohybovú rovnicu (8) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I\varepsilon$ a dosadíme do nej vzťah (9), dostaneme

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (10)$$

Následne dosadíme do rovnice (10) vzťah (6), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po matematickej úprave pohybovú rovnicu torzného kyvadla v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{M_0\varphi}{I} = 0. \quad (11)$$

Dosadením vzťahu (7) do rovnice (11) získame pohybovú rovnicu, ktorá popisuje časový priebeh výchylky torzného kyvadla v nasledujúcom tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi G d^4 \varphi}{32 I l} = 0. \quad (12)$$

Zavedieme substitúciu $\omega^2 = \frac{\pi G d^4}{32 I l}$ a získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami a s nulovou pravou stranou

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (13)$$

Jej riešenie môžeme nájsť v tvare

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka z rovnovážnej polohy v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Dosadením rovnice (14) do rovnice (11) zistíme, že torzné kyvadlo vykonáva harmonické kmity s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{M_0}{I}}. \quad (15)$$

Ak použijeme vzťah medzi uhlovou rýchlosťou a periódou $\omega = \frac{2\pi}{T}$, môžeme periódu T (dobu kmitu) torzného kyvadla, ktoré sa správa ako harmonický oscilátor vyjadriť v tvare

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_0}}. \quad (16)$$

Teleso zavesené na vlákne koná harmonické torzné kmity.

Pozn.: Na rozdiel od fyzikálneho kyvadla je doba kmitu torzného kyvadla vyjadrená presne pre akékoľvek jeho rozkyvy v rámci medzi úmernosti. Pre drôt dlhší ako 1 m je dovolená výchylka asi do 90°.

Dosadením rovnice (7) do rovnice (16) a následnou matematickou úpravou dostaneme hľadaný moment zotrvačnosti I v tvare

$$I = \frac{\pi G d^4}{32 l \omega^2} = \frac{G d^4}{128 \pi l} T^2. \quad (17)$$

Respektíve, meraním doby kmitu reverzného kyvadla o známom momente zotrvačnosti I sa dá určiť direkčný moment M_0 . Nevýhodou vzťahu (17) je, že musíme poznať modul pružnosti G skrúcaného drôtu. Ten nie je možné niekedy dostatočne dobre z tabuliek určiť, lebo nemusíme vedieť presne, z akého materiálu je vlákno vyrobené. Aby sme túto nevýhodu odstránili, môžeme mierne upraviť postup. Moment zotrvačnosti neznámeho telesa môžeme určiť aj tak, že ho zavesíme spolu s telesom so známym momentom zotrvačnosti.

Postupujme tak, že najskôr zmeriame periódu torzného kyvadla T , pre ktorú platí vzťah (16), kde I je moment zotrvačnosti kruhovej dosky z rovnorodého materiálu vzhľadom na os otáčania definovaný vzťahom

$$I = \frac{1}{2} m R^2, \quad (18)$$

kde m je hmotnosť a R polomer dosky, ktoré môžeme zistiť priamym meraním.

Potom položíme na kruhovú dosku pôvodného torzného kyvadla symetrické teleso tak, aby os súmernosti splynula s osou vlákna a vznikne torzné kyvadlo o neznámom momente zotrvačnosti. Zo vzťahu (5) vyplýva, že moment zotrvačnosti zloženého torzného kyvadla je určený súčtom momentu zotrvačnosti jeho častí, t. j. momentu zotrvačnosti telesa I a momentu zotrvačnosti meraného telesa I' . Doba kmitu T' takto vytvoreného torzného kyvadla je vyjadrená nasledovne

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + I'}{M_0}}. \quad (19)$$

Riešením sústavy rovníc (16) a (19) vyjadríme hľadaný moment zotrvačnosti I'

$$I' = I \left(\frac{T'^2}{T^2} - 1 \right), \quad (20)$$

pomocou ktorého z priamo nameraných períód určíme hľadaný moment zotrvačnosti.

A. Experimentálne určenie hodnoty momentu zotrvačnosti neznámeho telesa

Pomôcky

Stojan na upevnenie torzného kyvadla, záves torzného kyvadla, známy zotrvačník v tvare kruhovej dosky, neznámy (meraný) zotrvačník, stopky, váhy, posuvné meradlo, mikrometrické meradlo.

Postup merania

1. Určíme hmotnosť m torzného kyvadla a opakovaným meraním odmeriame priemer valcovitého telesa D , ktoré tvorí torzné kyvadlo. Meranie priemeru uskutočníme najmenej 10-krát.
2. Určíme štandardnú neistotu merania hmotnosti σ_m , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
3. Zostrojíme meraciu aparatúru podľa obrázka (Obr. 2).
4. Kyvadlo uvedieme do pohybu vychýlením telesa o uhol φ v horizontálnej rovine. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov torzného kyvadla. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty períód zapisujeme do tabuľky 1, kde hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 1.

| m (kg) | | | | | |
|----------|----------------|---------|--------------------|--|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | |
| | | | | $\bar{T} = \dots$ | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ |

- Uuríme hmotnosť m' vyšetřovaného telesa, pričom určíme aj štandardnú neistotu merania hmotnosti $\sigma_{m'}$, pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
- Na valec pôvodného torzného kyvadla umiestnime teleso, ktorého moment zotrvačnosti chceme experimentálne určiť.
- Zložené torzné kyvadlo uvedieme do pohybu. Po rozkmitaní kyvadla v zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov torzného kyvadla. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2, kde hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 2.

| m' (kg) | | | | | |
|-----------|----------------|---------|--------------------|---|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T'_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{T}' - T'_i)^2$ (s ²) |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T'_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T'_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | |
| | | | | $\bar{T}' = \dots$ | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Určíme aritmetický priemer priemeru základného torzného kyvadla \bar{D} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{D}}$.
2. Pre obe usporiadania torzného kyvadla určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T} a \bar{T}' , strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$ a $\sigma_{\bar{T}'}$.
3. Výsledok určenia periódy kmitov kyvadla uvádzame v tvare $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}})$ a $T' = (\bar{T}' \pm \sigma_{\bar{T}'})$.
4. Hodnotu momentu zotrvačnosti základného torzného kyvadla určíme podľa vzťahu

$$I = \frac{1}{8} m \bar{D}^2,$$

do ktorého dosadíme priemernú hodnotu priemeru \bar{D} a nameranú hmotnosť m .

5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu I pomocou neistôt priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2} = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\bar{D}}}{\bar{D}}\right)^2}.$$

6. Namerané hodnoty periódy kmitov kyvadla \bar{T} , \bar{T}' , určený moment zotrvačnosti I dosadíme do vzťahu (20) a vypočítame moment zotrvačnosti I' meraného telesa.
7. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu momentu zotrvačnosti zadaného telesa pomocou neistôt priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_{I'} = \sqrt{\left(\frac{\partial I'}{\partial I}\right)^2 (\sigma_I)^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial T'}\right)^2 (\sigma_{\bar{T}'})^2 + \left(\frac{\partial I'}{\partial T}\right)^2 (\sigma_{\bar{T}})^2},$$

$$\sigma_{I'} = \sqrt{\frac{I'^2}{I^2} (\sigma_I)^2 + \frac{4I^2 T'^2}{T^4} (\sigma_{\bar{T}'})^2 + \frac{4I^2 T'^4}{T^6} (\sigma_{\bar{T}})^2}.$$

8. V závere diskutujeme o výsledkoch získaných výpočtom a meraním, a o možných príčinách chýb. Vysvetlite, ktoré parametre prispievajú najviac k výslednej chybe.

SKÚMANIE VLASTNOSTÍ PRUŽNEJ DEFORMÁCIE

Úlohy

- A. *Určenie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče*
- B. *Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou*
- C. *Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou s použitím torzného kyvadla*

Teoretický úvod

Účinkom vonkajších síl na teleso môže nastať zmena pohybového stavu telesa alebo deformácia telesa. Pevné teleso, v ktorom sa môžu vzájomné vzdialenosti jeho častí meniť účinkom vonkajších síl, nazývame deformovateľné. Medzi hmotnými elementami (atómami, molekulami alebo iónmi v kryštalickej mriežke) pôsobia príťažlivé a odpudivé sily. Ak na teleso nepôsobia vonkajšie sily, tak vnútorné príťažlivé a odpudivé sily sú v rovnováhe. Ak na teleso začnú pôsobiť vonkajšie sily a teleso ostáva v pokoji, teleso sa môže deformovať. Zmena tvaru pevného telesa, jeho objemu alebo obidvoch vlastností súčasne zapríčinená účinkom vonkajších síl sa nazýva **deformácia** telesa. Podľa toho ako sa správajú telesá pri deformácii, rozdeľujeme deformáciu na pružnú (elastickú) a tvárnu (plastickú). Pružná deformácia je typ deformácie telesa, pri ktorej teleso nadobudne pôvodný tvar v okamihu, keď na teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily. Vlastnosť telies obnovovať svoje rozmery, tvar a objem sa nazýva **pružnosť** (napríklad malé predĺženie pružiny). Typ deformácie telesa, ktorá zostáva aj potom, ako prestanú na teleso pôsobiť deformujúce sily sa nazýva tvárna deformácia. V praxi sa vyskytujú najčastejšie oba druhy deformácie súčasne a najčastejšie sú zložené z niektorých jednoduchých deformácií.

Pri zväčšovaní vzájomnej vzdialenosti častíc (deformácia v ťahu) prevládnu príťažlivé sily, pri zmenšovaní tejto vzdialenosti (deformácia tlakom) prevládnu odpudivé sily. Ak sa obmedzíme na veľmi malé deformácie, bude výsledná sila približne úmerná výchylke z rovnovážnej polohy. V oblasti malých deformácií je súvis medzi účinkujúcimi silami a deformáciou, ktorú vyvolávajú, vyjadrený Hookeovým zákonom, ktorý hovorí, že deformácia pružného telesa je úmerná vonkajším deformujúcim silám. Vonkajšie deformujúce sily pôsobia spravidla cez povrchové plochy. Ak sa teleso deformuje tak, že sa jeden rozmer telesa predĺži (alebo sa skrúti) a ostatné rozmery (priečne) sa skrúti (predĺžia), hovoríme o **deformácii ťahom** (alebo **tlakom**). Ak deformujúca sila pôsobí kolmo na povrch telesa, vyvoláva **deformáciu ťahom** alebo **tlakom** a koeficient úmernosti v Hookeovom zákone (bude uvedené nižšie v texte) je modul pružnosti v ťahu E (charakterizujúci materiál pri deformácii ťahom, tlakom a ohybom), nazývaný aj Youngov modul. Ak deformujúca sila pôsobí v rovine povrchu telesa (je jej dotyčnicou), vyvoláva **deformáciu šmykom** a G je modul pružnosti v šmyku (charakterizujúci materiál pri deformácii šmykom alebo torziou). Moduly pružnosti E a G majú

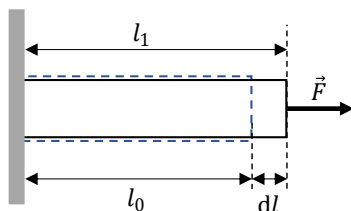
rovnakú jednotku ako napätie (Pa). Takéto deformácie (ťahom, šmykom) nazývame jednoduché a možno ich využiť na experimentálne stanovenie modulu pružnosti v ťahu E a modulu pružnosti v šmyku G .

A. Určenie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče

Najjednoduchším príkladom deformácie v ťahu je predĺženie tyče (drôtu) namáhanej ťahom. Ak priečný prierez tyče s obsahom S namáhame silou F , ktorá je kolmá na plochu S (Obr. 1), vzniká v tyči napätie

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (1)$$

Pretože v tomto prípade pôsobí sila kolmo na prierez, nazývame toto **napätie normálové** a jeho jednotkou je pascal, $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 1. Tyč na jednej strane upevnená a na druhej strane napínaná silou F

Na predĺženie tyče s pôvodnou dĺžkou l_0 o hodnotu dl potrebujeme pôsobiť elementárnym normálovým napätím $d\sigma$, pričom sa ukazuje, že hodnota predĺženia dl je úmerná pôsobiacemu napätiu σ a samotnej dĺžke tyče, t. j. $dl = kld\sigma$, kde k je konštanta úmernosti. V dôsledku pôsobenia napätia σ sa tyč predĺži a jej novú dĺžku l_1 vypočítame ako

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = k \int_0^\sigma d\sigma. \quad (2)$$

Zintegrovaním vzťahu (2) dostaneme

$$\ln \frac{l_1}{l_0} = k\sigma \quad (3)$$

a nová dĺžka tyče l_1 bude $l_1 = l_0 e^{k\sigma}$. Vidíme, že dĺžka tyče sa s pôsobiacim napätím mení exponenciálne. Ak funkciu $e^{k\sigma}$ rozvineme do Maclaurinovho radu $e^{k\sigma} = 1 + \frac{k\sigma}{1!} + \frac{(k\sigma)^2}{2!} + \frac{(k\sigma)^3}{3!} + \dots$ a uvedomíme si, že pre väčšinu materiálov pri použití bežných reálne vyvíjaných napätí σ je súčin $k\sigma \ll 1$, potom členy Maclaurinovho radu obsahujúce druhé a vyššie mocniny môžeme voči prvým dvom členom radu zanedbať, keďže prispievajú ku zmene dĺžky len veľmi malou mierou. Pre novú dĺžku tyče l_1 tak môžeme napísať $l_1 = l_0(1 + k\sigma)$ a úpravou tohto vzťahu dostaneme

$$l_1 = l_0 + l_0 k \sigma,$$

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = k \sigma. \quad (4)$$

Ak delíme predĺženie tyče $\Delta l = l_1 - l_0$ pôvodnou dĺžkou l_0 , dostaneme deformáciu jednotky dĺžky tyče, ktorá nezávisí od dĺžky tyče. Tento pomer $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$ rovný ľavej strane druhej rovnice (4) nazývame **relatívne (pomerné) predĺženie** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5)$$

Potom môžeme vzťah (4) napísať v tvare $\varepsilon = k \sigma$, kde k má význam koeficientu pružnosti v ťahu. Jeho prevrátená hodnota $1/k = E$ je **modul pružnosti v ťahu E (Youngov modul)**. Získaný vzťah medzi napätím a deformáciou vyjadrenou relatívnym predĺžením ε nazývame **Hookeov zákon** pre deformáciu v ťahu (tlaku)

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (6)$$

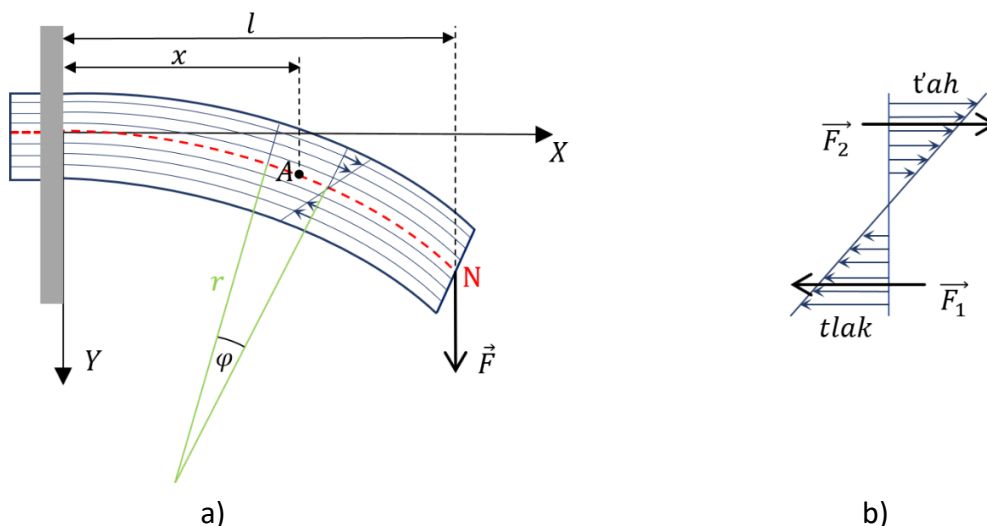
Hookeov zákon môžeme využitím predchádzajúcich vzťahov napísať aj v tvare

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}. \quad (7)$$

Modul pružnosti v ťahu má rozmer napätia a vyjadruje priamu úmernosť medzi pôsobiacim napätím a vyvolanou deformáciou. Je to jedna zo základných veličín, ktorá charakterizuje pružné vlastnosti materiálu, okrem iného závisí aj od teploty.

Deformácia v ťahu sa uplatňuje aj pri ohybe tyče. Pri určovaní modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče sa vychádza z popisu deformácie telies ohybom. Deformácia ohybom (priehybom) je zložitejšou formou deformácie v ťahu (tlaku).

Na popísanie deformácie ohybom uvažujme rovnorodú tyč s dĺžkou l s konštantným prierezom po celej dĺžke, ktorá je na jednom konci upevnená a na druhom konci zaťažená silou F (Obr. 2.a). Sila F pôsobiaca na jej druhom konci vyvoláva jej priehyb. Prehnutie tyče vplyvom jej vlastnej hmotnosti bude veľmi malé, a preto ho môžeme zanedbať. Ak si tyč rozdelíme na tenké vrstvy, ktoré sú zložené z jednotlivých vlákien rovnobežných s osou tyče, na obrázku (Obr. 2.a) vidíme, že horné vrstvy sa predlžujú, pretože sú namáhané ťahom, a spodné vrstvy skracujú v dôsledku namáhania tlakom. Niekde v strede tyče preto musí existovať vrstva, ktorá nie je namáhaná vôbec. Je to tzv. neutrálna vrstva N , ktorá si zachováva svoju pôvodnú dĺžku. Neutrálna vrstva prechádza ťažiskom prierezu tyče, čiže pri pravidelných prierezoch ich stredom. Experimentálne je možné polohu neutrálnej vrstvy potvrdiť pozorovaním ohybu na priehľadnej tyči napr. z polymetylmetakrylátu, ak sa ohyb tyče pozoruje v polarizovanom svetle (fotoelastický jav).



Obr. 2. a) Schematické zobrazenie tyče na jednom konci upevnenej a na druhom konci namáhanej silou F , b) Detail rozloženia vnútorných síl

Sila F pôsobiaca na konci tyče vytvorí v ľubovoľnom priereze tyče, ktorý je vzdialený o x od miesta upevnenia tyče moment vonkajšej sily

$$M = F(l - x). \quad (8)$$

Pri tomto vzťahu predpokladáme, že ohyb tyče je malý. Pri malom ohybe tyče vektor sily F a vektor ramena sily $(l - x)$ zvierajú uhol takmer 90° , a preto nemusíme vo výpočte momentu sily vo vzťahu (8), ktorý je definovaný ako vektorový súčin medzi ramenom, na ktorom sila pôsobí a silou, uvažovať uhol medzi nimi, lebo $\sin 90^\circ = 1$.

Voči tomuto momentu vonkajšej sily, ktorý sa transformuje na moment vnútornej sily, pôsobí v priereze tyče moment vnútorných síl pružnosti, ktorý je vytváraný vnútornými silami, ktoré pôsobia medzi jednotlivými časticami materiálu tyče a snažia sa tyč udržať v rovnováhe. V rovnovážnom stave prehnutej tyče sú moment vonkajšej sily a moment vnútorných síl pružnosti v rovnováhe, to znamená, že vektory uvedených momentov síl sú rovnako veľké, ale opačne orientované.

Aby sme našli súvislosť medzi momentom vonkajšej sily a momentom vnútornej sily, ktoré pôsobia na prehnutú tyč, vyberme si malý kúsok prehnutej tyče vo vzdialenosti x od upevnenia tyče (Obr. 3.a).

Pri malom prenutí tyče bude mať vlákno neutrálnej vrstvy tvar kruhového oblúka s polomerom krivosti r , ktorého dĺžka bude s , pričom dĺžka s na kruhovom oblúku prislúcha rovinný uhol φ . Pred prenutím tyče mali v tejto časti tyče všetky vlákna vrstiev dĺžku s . Po prenutí tyče sa však vlákno vo vzdialenosti u nad neutrálnym vláknom predĺži o nejakú vzdialenosť. Keďže všetky vlákna prehnutej tyče vidíme pod rovnakým rovinným uhlom φ , môžeme dĺžku vlákna s neutrálnej vrstvy vo vzdialenosti r od stredu oblúka vyjadriť v tvare

$$s = r \varphi \quad (9)$$

a dĺžku vlákna s_u vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna vyjadriť v tvare

$$s_u = (r + u)\varphi. \quad (10)$$

Vyšetrované vlákno vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna sa teda predĺžilo o

$$\Delta s = s_u - s = (r + u)\varphi - r\varphi = u\varphi. \quad (11)$$

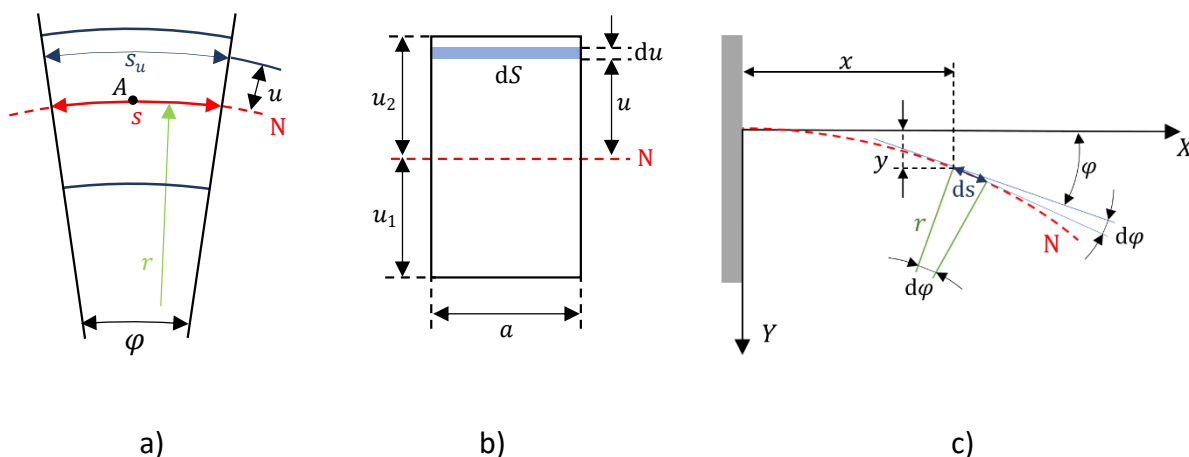
Ak použijeme vzťah (5) pre relatívne predĺženie ε , môžeme relatívne predĺženie vyšetrovaného vlákna vyjadriť v tvare

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{u\varphi}{r\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

Toto relatívne predĺženie je vyvolané napätím v ťahu. Ak predpokladáme, že priehyb tyče sa odohráva v medziach pružnej deformácie, ktorá je popísaná Hookeovým zákonom daným vzťahom (6), môžeme pre normálové napätie vo vyšetrovanej vrstve vlákna napísať

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{u}{r}. \quad (13)$$

Zo vzťahu (13) vyplýva, že s narastajúcou vzdialenosťou od neutrálneho vlákna sa napätie vo vláknach tyče zväčšuje. Pod neutrálnym vláknom sa mení ťah na tlak. Normálové napätie v tlaku sa pod neutrálnym vláknom riadi tou istou rovnicou (13).



Obr. 3. K popisu odvedenia pre ohyb tyče a) bočný pohľad na výrez tyče b) pohľad na prierez tyče, c) bočný pohľad na neutrálnu vrstvu tyče

Ako je naznačené na obrázku (Obr. 2.b), všetky napätia nad neutrálnym vláknom vytvárajú výslednú silu F_2 a všetky napätia pod neutrálnym vláknom silu F_1 . Ak nemá byť neutrálna vrstva namáhaná, musí platiť

$$F_1 + F_2 = 0. \quad (14)$$

Pomocou normálového napätia daného vzťahom (1), ktoré sa v diferenciálnom tvare rovná $\sigma = \frac{dF}{dS}$, môžeme elementárnu silu dF , ktorá pôsobí na elementárnu plochu prierezu tyče dS , vyjadriť v tvare

$$dF = \sigma dS = \frac{E}{r} u dS. \quad (15)$$

Zo vzťahu (14) vyplýva, že v priereze tyče je výslednica všetkých síl pôsobiacich na prehnutú tyč rovná nule. Z uvedeného vyplýva, že aj výslednica elementárnych síl pôsobiacich v priereze tyče musí byť nulová, a preto musí platiť

$$F = \int_{-u_1}^{u_2} dF = \int_{-u_1}^{u_2} \frac{E}{r} u dS = \frac{E}{r} \int_{-u_1}^{u_2} u dS = 0, \quad (16)$$

kde $-u_1$ a u_2 sú vzdialenosti krajných vrstiev od neutrálnej vrstvy. Aby bol vzťah (16) platný, musí sa integrál v ňom rovnať nule. Je možné ukázať, že integrál vo vzťahu (16) je rovný nule, ak neutrálna vrstva (plocha) prechádza ťažiskom prierezovej plochy. A to je dôkaz tvrdenia, ktoré bolo uvedené vyššie, že neutrálna plocha (vlákno) prechádza ťažiskom prierezu tyče. Každá elementárna sila dF vytvára vzhľadom k osi N (Obr. 3.b), ktorú nazývame neutrálnou osou, elementárny moment vnútornej sily dM_v , ktorý je rovný

$$dM_v = u dF = \frac{E}{r} u^2 dS. \quad (17)$$

Celkový moment vnútornej sily M_v vzhľadom k neutrálnej osi vypočítame ako integrál poslednej rovnice cez výšku prierezu tyče, t. j.

$$I = \int_{-u_1}^{u_2} u^2 dS \quad (18)$$

sa nazýva plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na neutrálnu os a pomocou neho môžeme vyjadriť celkový moment vnútornej sily M_v v tvare

$$M_v = \frac{E I}{r}. \quad (19)$$

V rovnovážnom stave prehnutej tyče je celkový moment vnútornej sily M_v vzhľadom na neutrálnu os tyče rovný momentu vonkajšej sily M , t. j. $M_v = M$, a potom

$$\frac{E I}{r} = (l - x)F. \quad (20)$$

Dôležitým parametrom pri priehybe tyče je veľkosť priehybu y , ktorý je vytvorený momentom vonkajšej sily M . Ak nahradíme oblúk krivky, do ktorého sa prehne niektoré neutrálne vlákno kruhovým oblúkom polomeru r a so stredovým uhlom $d\varphi$, ktorý je totožný so zmenou uhla φ ,

ktorý zvierá dotyčnica k oblúku s osou X pri zvolenom usporiadaní súradnicových osí, je dĺžka oblúka $ds = r d\varphi$ (Obr. 3.c). Pri veľmi malom priehybe môžeme uvažovať, že $ds \approx dx$ (pre dobré grafické znázornenie situácie sme volili na obrázku väčší priehyb), a potom pre tangens uhla φ platí $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx$. Pri veľmi malom uhle je $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$, takže $\varphi = dy/dx$ a pre polomer krivosti r môžeme napísať

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (21)$$

Ak z rovnice (20) vyjadríme r a dosadíme do vzťahu (21), dostaneme diferenciálnu rovnicu ohybovej čiary v tvare

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI} (l - x). \quad (22)$$

Integráciou tejto rovnice (22) dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Flx}{EI} - \frac{Fx^2}{EI} + C_1. \quad (23)$$

Rovnica (23) udáva smernicu dotyčnice ohybovej čiary v mieste x . Integračná konštanta C_1 sa určí z okrajovej podmienky, ak položíme $x = 0$, potom $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = C_1 = 0$, pretože smernica dotyčnice v mieste upevnenia je nulová. Ďalšou integráciou dostaneme

$$y = \frac{Flx^2}{2EI} - \frac{Fx^3}{6EI} + C_2. \quad (24)$$

Integračnú konštantu C_2 určíme z okrajovej podmienky. Ak $x = 0$, potom $(y)_{x=0} = C_2 = 0$, pretože priehyb v mieste upevnenia je nulový. Ohyb tyče y na voľnom konci, čiže pre $x = l$ zaťaženom silou F bude

$$y = \frac{Fl^3}{3EI}. \quad (25)$$

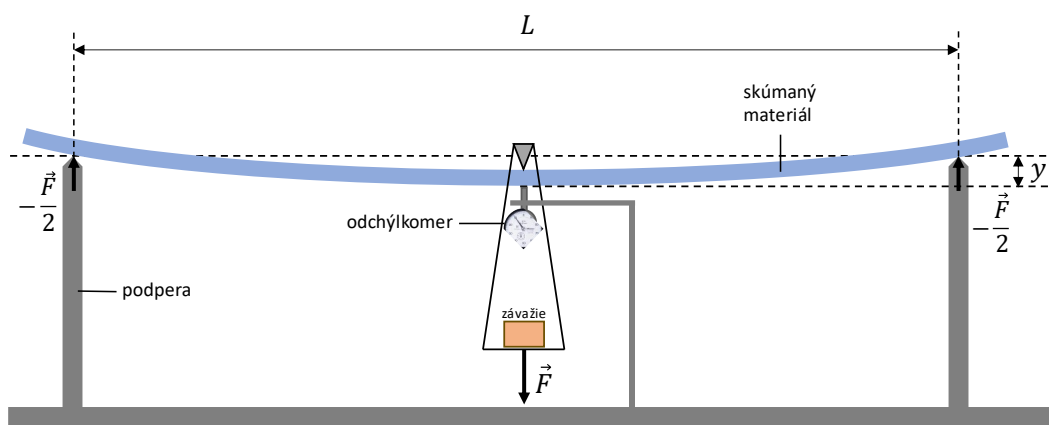
Ako vidíme zo vzťahu (25), meranie ohybu tyče umožňuje experimentálne určiť modul pružnosti v ťahu E , ak poznáme dĺžku deformovanej tyče l , plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče I , veľkosť priehybu tyče y a veľkosť deformujúcej sily F .

Jednou z možností ako realizovať experiment podľa vyššie uvedeného odvodenia je upnutie tyče do zveráka a koniec tyče zaťažovať silou F (to odpovedá meraniu ohybom). Inou možnosťou je merať priehyb tyče.

Ak meranú vzorku, materiál v tvare hrubšej tyče s obdĺžnikovým prierezom s výškou b a šírkou a podoprieme na dvoch koncoch britmi, ktorých vzdialenosť je L a uprostred nich tyč zaťažíme silou F , môžeme v pôsobisku sily pozorovať priehyb y (Obr. 4). Keď dosadíme do vzťahu (25) za $l = L/2$, $F = mg/2$ a za plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče $I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u^2 adu = \frac{1}{12} ab^3$,

a následne z neho vyjadríme E , tak dostaneme vzťah pre modul pružnosti tyče obdĺžnikového prierezu v tvare

$$E = \frac{gL^3 m}{4ab^3 y}. \quad (26)$$



Obr. 4. Tyč podpretá na dvoch britoch a zaťažená silou F

Pre tyč kruhového prierezu (kde d je priemer tyče) je plošný moment zotrvačnosti I vzhľadom na ohybovú os rovný $I = \frac{\pi d^4}{64}$ a pre modul pružnosti tyče s kruhovým prierezom platí vzťah

$$E = \frac{4gL^3 m}{3\pi d^4 y}. \quad (27)$$

Zo vzťahov (26) a (27) vyplýva, že priehyb y je priamo úmerný veľkosti pôsobiacej deformujúcej sily F , respektíve hmotnosti m . Na základe týchto rovníc môžeme merať modul pružnosti E , ak odmeriame rozmery tyče a , b , vzdialenosť britov L a závislosť priehybu na pôsobiacej sile.

Pomôcky

Sada závaží, mikrometrické meradlo, dĺžkové meradlo, odchýlkomer, vyšetřované materiály v tvare tyče, konštrukcia na uchytenie tyčí a odchýlkomera, stojany a závesný systém.

Postup merania

1. Priamym meraním určíme vzdialenosť medzi podperami L a určíme štandardnú neistotu merania dĺžky σ_L , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
2. Priamym meraním určíme charakteristické rozmery prierezu vyšetřovaného materiálu tvaru tyče a , b . Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky 1.
3. Odchýlkomer umiestnime do stredu medzi dve podpery a nastavíme ho tak, aby pri základnom zaťažení tyče (dané záťažou prázdneho závesného systému na zaťažovanie materiálu, na ktorý kladieme závažia) ukazoval nulu.

Tabuľka 1.

| i | $L = \dots m$ | | | |
|-----|-------------------|--|-------------------|--|
| | a_i (m) | $\Delta_{a_i}^2 = (a_i - \bar{a})^2$ (m ²) | b_i (m) | $\Delta_{b_i}^2 = (b_i - \bar{b})^2$ (m ²) |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| ⋮ | | | | |
| n | | | | |
| | $\bar{a} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{a_i}^2 = \dots$ | $\bar{b} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{b_i}^2 = \dots$ |

- Zmeriame teplotu miestnosti t_1 .
- Pomocou digitálnych váh odvážíme hmotnosť použitých závaží. Skúmanú tyč z daného materiálu postupne zaťažujeme závažiami, ktoré ukladáme na závesný systém. Meriame priehyb tyče y , ktorého hodnotu odčítame z odchýlkomera. Meranie uskutočníme pre 10 rôznych zaťažení tyče. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky 2.
- Po dokončení merania opäť zmeriame teplotu miestnosti t_2 .
- Meranie opakujeme pre rôzne materiály (meď, oceľ, drevo, ...).

Tabuľka 2.

| i | m (kg) | F (N) | y (m) | $k_i = \frac{y}{m}$ (m · kg ⁻¹) | $\Delta_{k_i}^2 = (k_i - \bar{k})^2$ (m ² · kg ⁻²) |
|-----|----------|---------|---------|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| n | | | | | |
| | | | | $\bar{k} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{k_i}^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

- Z nameraných hodnôt rozmerov tyče a_i, b_i vypočítame ich stredné hodnoty \bar{a}, \bar{b} a stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{a}}, \sigma_{\bar{b}}$.
- Výsledky uvádzame v tvare $a = (\bar{a} \pm \sigma_{\bar{a}}), b = (\bar{b} \pm \sigma_{\bar{b}}), L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$.
- Linearitu závislosti priehybu tyče y od zaťaženia m overíme tak, že ich namerané hodnoty vynesieme do grafickej závislosti $y = f(m)$.
- Pre každé zaťaženie tyče vypočítame konštantu úmernosti $k_i = y_i/m_i$.
- Určíme aritmetický priemer \bar{k} , jeho štandardnú neistou $\sigma_{\bar{k}}$ a výsledok uvádzame v tvare $k = (\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}})$.

6. Vypočítané aritmetické priemery pre priamo merané veličiny $\bar{a}, \bar{b}, \bar{k}, \bar{L}$ dosadíme do vzťahu (26), pričom pomer m/y vo vzťahu nahradíme prevrátenou hodnotou konštanty úmernosti $1/\bar{k}$ a určíme hľadaný modul pružnosti E vyšetřovaného materiálu

$$E = \frac{g\bar{L}^3}{4\bar{a}\bar{b}^3} \frac{1}{\bar{k}}.$$

7. Použitím metódy na určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu E pomocou neistôt priamo nameraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 (\sigma_a)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 (\sigma_b)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial k}\right)^2 (\sigma_k)^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial E}{\partial L} = \frac{3gL^2}{4ab^3} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{gL^3}{4a^2b^3} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -\frac{3gL^3}{4ab^4} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{gL^3}{4ab^3} \frac{1}{k^2}.$$

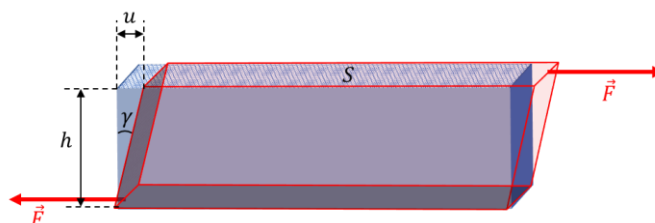
Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny E najväčšou mierou.

8. Finálny výsledok merania modulu pružnosti v ťahu uvidíme v tvare $E = (E \pm \sigma_E)$.
9. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v ťahu E s tabuľkovou hodnotou E_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|E - E_t|}{E_t} 100 \%.$$

B. Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou

Modul pružnosti v šmyku, nazývaný aj modul torzie, môžeme určiť napríklad z konkretizácie Hookeovho zákona pre deformáciu v šmyku. O deformácii pružných telies šmykom hovoríme vtedy, keď sa jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu posúvajú po sebe bez toho, aby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť h . Takáto deformácia nastáva, napríklad ak pôsobí sila \vec{F} v smere dotýčnice na rovinu hornej steny hranola s obsahom S a vzniká posunutie hornej podstavy voči dolnej o vzdialenosť u . Výška hranola h je dostatočne veľká, aby nenastala deformácia ohybom (Obr. 5).



Obr. 5. Deformácia šmykom

Pôsobením dotýčnicovej (tangenciálnej) sily F na hornú stenu hranola s obsahom S vzniká šmykové, tangenciálne napätie τ . Deformácia závisí aj na veľkosti plochy S , na ktorú dotýčnicová sila pôsobí a určuje tangenciálne napätie

$$\tau = \frac{F}{S}. \quad (28)$$

Pre deformáciu šmykom má **Hookeov zákon pre šmyk tvar**

$$\tau = G \gamma. \quad (29)$$

G je modul pružnosti v šmyku. Je to materiálová konštanta, ktorá má rozmer napätia a jej jednotka je pascal ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$). Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však ku skoseniu γ , ktoré sa nazýva relatívne posunutie (skosenie) hornej základne vzhľadom na dolnú. Uhol γ môžeme vyjadriť pomocou funkcie tangens ako $\tan \gamma = \frac{u}{h}$. Ak je však uhol γ malý, pre funkciu tangens platí $\tan \gamma \approx \gamma$. Pre malé skosenia môžeme potom relatívne posunutie γ vyjadriť v tvare

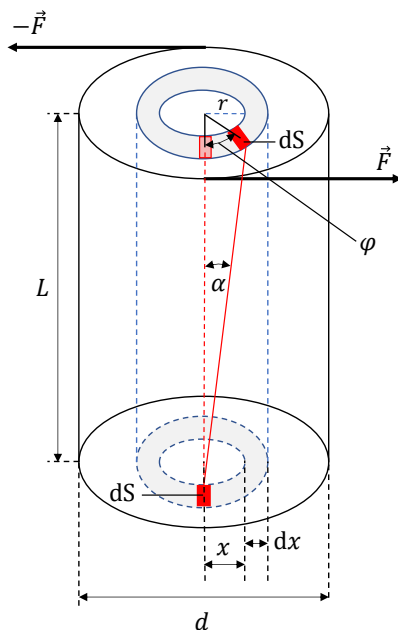
$$\gamma = \frac{u}{h}, \quad (30)$$

kde u je posunutie rezu hranola rovnobežného s podstavou a h je vzdialenosť rezu od podstavy. Hookeov zákon pre deformáciu v šmyku má využitím vzťahov (28) a (29) tvar

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}. \quad (31)$$

Priame využitie Hookeovho zákona na určenie modulu pružnosti v šmyku je pomerne málo praktické a príslušná metóda aj málo presná. Preto sa modul v šmyku častejšie určuje z torzie tyčí alebo drôtov. Pri torzii je totiž každá časť vzorky namáhaná iba šmykom a pritom, i keď šmyk v každej časti vzorky je pomerne malý (leží hlboko pod mierou úmernosti deformácie a napätia), výsledný uhol stočenia vzorky môže byť veľký a teda dobre merateľný. Torzná deformácia je zložitejším prípadom deformácie v šmyku. Jednotlivé priečne vrstvy telesa sa krútením vzájomne natáčajú.

Uvažujme drôt alebo tyč tvaru valca s dĺžkou L a rovnakým prierezom po celej dĺžke s priemerom d , ktorá je na jednom konci upevnená. Na druhý koniec tyče pôsobíme krútiacim momentom sily M , ktorého smer je rovnobežný s osou tyče (drôtu). Tento moment sily M vyvoláva šmykovú deformáciu každého pozdĺžneho vlákna dĺžky L a elementárneho prierezu dS (Obr. 6). Sledované deformované vlákno je vo vzdialenosti r od torznej osi predstavovanej neutrálnym vláknom, ktoré sa pri krútení nedeformuje. Pri natočení voľného konca tyče (vplyvom krútiaceho momentu) o uhol skrútenia φ sa posunie voľný koniec vlákna po kružnici polomeru r o úsek $u = r\varphi$. Šmykový deformačný uhol $\alpha = u/L = r\varphi/L$ súvisí podľa Hookeovho zákona s tangenciálnym napätím $\tau = dF/dS = G\alpha$.



Obr. 6. Schéma torznej deformácie tyče s kruhovým prierezom

Celkový torzný moment sily dostaneme integráciou elementárnych momentov sily po celej ploche voľnej podstavy

$$M = \int_S dM = \frac{G\varphi}{L} \int_S r^2 dS = \frac{GI}{L} \varphi, \quad (32)$$

kde $I = \int_{(S)} r^2 dS$ je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na torznú os. Pre tyč s kruhovým prierezom postupujeme pri výpočte I tak, že plochu kruhu rozdelíme na plošné elementy dS (Obr. 6), ktoré v polárnych súradniciach nadobúdajú vyjadrenie

$$dS = r d\beta du \quad (33)$$

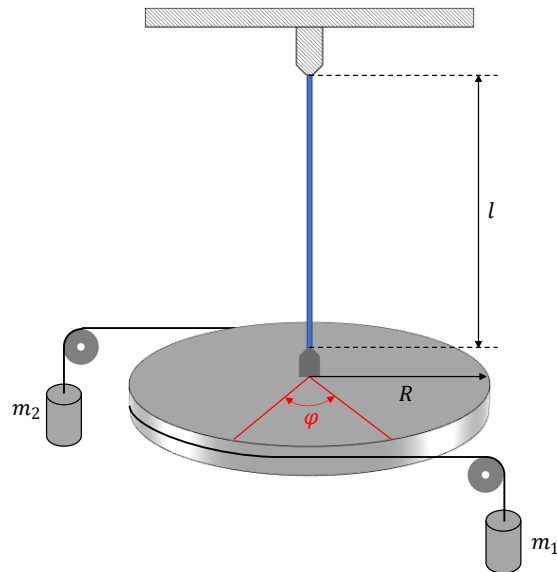
a vypočítame príslušný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (34)$$

Zo vzťahu (32) vidíme, že torzný uhol φ je priamo úmerný torznému momentu M . Konštantu $\frac{GI}{L}$ nazývame direkčný moment tyče

$$M_0 = \frac{GI}{L}. \quad (35)$$

Statická metóda merania modulu pružnosti v šmyku využíva torziu tenkej tyče (drôtu). Meranie je usporiadané tak, že k tyči, ktorej horný koniec je upevnený v držiaku, pripevníme na druhý koniec kotúč s priemerom D a uhlovou stupnicou. Na kotúči je drážka, v ktorej sú vyvedené pevné vlákna na opačných stranách kotúča cez kladky k miskám na zaťaženie závažiami (Obr. 7).



Obr. 7. Schéma meracieho zariadenia pre určenie momentu zotrvačnosti v torzii tyče (drôtu)

Na obvode kotúča pôsobia sily kolmo na torznú os vyvolané cez kladky tiažou závaží o hmotnostiach m_1 a m_2 . Pre výsledný torzný (krútiaci) moment týchto síl platí $M = (m_1 + m_2)g R$, kde $D = 2R$ je priemer kotúča. Aby nevznikla sila vychylujúca os kotúča, volíme počas merania závažia tak, aby platila podmienka $m_1 = m_2$. Ak uvedený moment sily dosadíme do vzťahu (32) spolu s využitím vzťahu (34), pre experimentálne určenie modulu pružnosti dostaneme vzťah

$$G = \frac{16gDL}{\pi d^4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{\varphi}. \quad (36)$$

Pomôcky

Zariadenie na meranie skrútenia tyče, tyče (drôtu) rôznych materiálov, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, mikrometrické meradlo, sada závaží, digitálne váhy.

Postup merania

1. Odmeriame teplotu prostredia bezprostredne pred meraním a po meraní.
2. Po upevnení tyče (drôtu) do príslušného meracieho zariadenia, mikrometrickým meradlom odmeriame priemer drôtu d posuvným meradlom, priemer otočného kotúča D a dĺžkovým meradlom odmeriame dĺžku drôtu L . Príslušné veličiny meriame aspoň 10-krát na rôznych miestach.
3. Namerané údaje priemeru tyče d_i , priemeru kotúča D_i , vzdialenosti L_i zapisujeme do tabuľky 1.
4. Určíme aritmetické priemery $\bar{D}, \bar{L}, \bar{d}$ a ich štandardné neistoty merania $\sigma_{\bar{D}}, \sigma_{\bar{L}}, \sigma_{\bar{d}}$.
5. Výsledky uvádzame v tvare $D = (\bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}})$, $d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}})$, $L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$.

Tabuľka 1.

| i | d_i (m) | $\Delta_{d_i}^2$ (m ²) | D_i (m) | $\Delta_{D_i}^2$ (m ²) | L_i (m) | $\Delta_{L_i}^2$ (m ²) |
|-----|-------------------|---------------------------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------|---------------------------------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| n | | | | | | |
| | $\bar{d} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{d_i}^2 = \dots$ | $\bar{D} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{D_i}^2 = \dots$ | $\bar{L} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{L_i}^2 = \dots$ |

6. Tyč upevnenú v meracom zariadení postupne rovnomerne zaťažujeme pridávaním závaží na obidve meracie misky a meriame príslušný uhol skrútenia φ v závislosti od súčtu hmotností závaží $m_1 + m_2$.
7. Namerané údaje zapisujeme do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

| i | $m_1 + m_2$ (kg) | φ (rad) | $k_i = \varphi / (m_1 + m_2)$ (rad · kg ⁻¹) | $\Delta_{k_i}^2$ (rad ² · kg ⁻²) |
|-----|------------------|-----------------|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| ⋮ | | | | |
| n | | | | |
| | | | $\bar{k} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{k_i}^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Overíme linearitu torznej deformácie tak, že namerané hodnoty uhla skrútenia φ a hmotnosti m vynesieme do grafickej závislosti $\varphi = f(m)$.
2. Pre jednotlivé zaťaženia drôtu určíme konštantu úmernosti k_i .
3. Určíme aritmetický priemer \bar{k} a k nemu príslušnú neistotu merania $\sigma_{\bar{k}}$ a výsledok zapíšeme v tvare $k = (\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}})$.
4. Hodnotu modulu pružnosti v šmyku G určíme využitím vzťahu (36), v ktorom pomer $\frac{(m_1+m_2)}{\varphi}$ vo vzťahu nahradíme prevrátenou hodnotou konštanty úmernosti $1/\bar{k}$.

$$G = \frac{16g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \cdot \frac{1}{\bar{k}}$$

Do vzťahu dosadíme priemerné hodnoty priemeru kotúča \bar{D} , priemeru drôtu \bar{d} , dĺžky drôtu \bar{L} a konštanty úmernosti \bar{k} .

5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu merania veličiny G pomocou neistôt priamo meraných veličín D, L, d podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{G}} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \bar{D}}\right)^2 \sigma_{\bar{D}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{L}}\right)^2 \sigma_{\bar{L}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{d}}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{k}}\right)^2 \sigma_{\bar{k}}^2}$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{D}} = \frac{16g\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{L}} = \frac{16g\bar{D}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}},$$

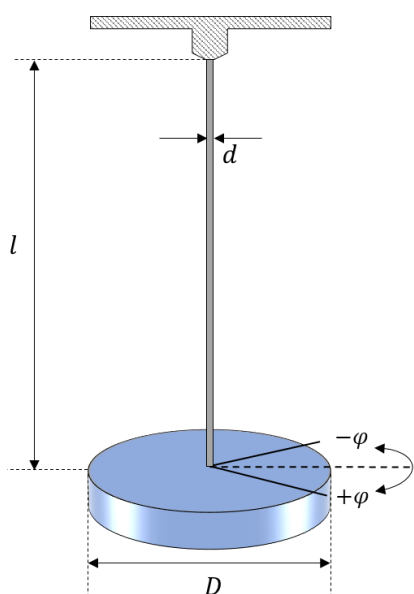
$$\frac{\partial G}{\partial \bar{d}} = -\frac{64g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^5} \frac{1}{\bar{k}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{k}} = -\frac{16g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}^2}.$$

6. Určíme, ktorá z týchto veličín (D, L, d, k) prispieva k výslednej neistote veličiny G najväčšou mierou, t. j. ktorý zo sčítancov v rovnici je najväčší.
7. Finálny výsledok hodnoty modulu pružnosti v šmyku uvidíme v tvare $G = (\bar{G} \pm \sigma_{\bar{G}})$.
8. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v šmyku G s tabuľkovou hodnotou G_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|G - G_t|}{G_t} 100 \%$$

C. Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou s použitím torzného kyvadla

Jednou z metód na meranie modulu pružnosti v torzii je dynamická metóda s použitím torzného kyvadla, kedy je experiment podobne usporiadaný ako v úlohe Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou, ale namiesto kotúča upevníme na koniec tyče (drôtu) teleso, ktorého moment zotrvačnosti I je voči pozdĺžnej osi tyče niekoľkokrát väčší ako moment zotrvačnosti samotnej tyče. Pod torzným kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku tvaru kruhu, alebo valec) upevnené v jeho strede na zvislom pružnom vlákne tak, že os súmernosti je totožná s osou vlákna (Obr. 8).



Obr. 8. Grafické znázornenie pohybu torzného kyvadla

Ak vytočíme zavesené teleso z jeho rovnovážnej polohy o uhol φ (uhol potočenia z rovnovážnej polohy), po uvoľnení sa teleso bude otáčať okolo osi drôtu. Tento pohyb je vyvolaný torznými silami, ktorých pôvod je v deformácii vlákna. Moment týchto síl M vzhľadom na os otáčania je podľa Hookeovho zákona v každom okamihu v hraniciach pružnej deformácie drôtu úmerný okamžitej výchylke φ . Keďže torzné sily pôsobia proti výchylke, moment torzných síl má opačné znamienko ako výchylka, ktorá ho vyvolala a platí

$$M = -M_0\varphi, \quad (37)$$

kde M_0 je konštanta úmernosti a nazýva sa direkčný moment závesu alebo torzná tuhosť. Jej fyzikálny význam je moment sily, potrebný na vytočenie závesu o jednotkový uhol. Závisí len od elastických vlastností závesu (modulu pružnosti v šmyku G materiálu závesu) a jeho geometrických rozmerov.

Ak teleso zavesené na skrútenom vlákne pustíme, budú ho torzné sily skrúteného drôtu vracieť do rovnovážnej polohy a teleso sa rozkmitá rotačnými (torznými) kmitmi okolo osi symetrie idúcej osou periodicky skrúcaného sa drôtu. Pohybová rovnica torzného kyvadla má tvar pohybovej rovnice telesa konajúceho rotačný pohyb okolo pevnej osi

$$\mathbf{M} = I_T\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (38)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu síl spôsobujúcich otáčavý pohyb okolo pevnej osi, I_T je moment zotrvačnosti zaveseného telesa vzhľadom na os vlákna a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Moment zotrvačnosti vlákna je veľmi malý, a preto ho v rovnici (38) môžeme zanedbať. Veľkosť vektora uhlového zrýchlenia je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (39)$$

Keď pohybovú rovnicu (38) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I_T\varepsilon$ a dosadíme do nej vzťah (39) dostaneme

$$M = I_T \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (40)$$

Následne do rovnice (39) dosadíme vzťah (37) a vzťah (35), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po matematickej úprave pohybovú rovnicu torzného kyvadla v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T}\varphi = 0. \quad (41)$$

Ak zavedieme substitúciu $\omega^2 = \frac{GI}{LI_T}$, získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (42)$$

Jej riešenie môžeme nájsť v tvare

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (43)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka z rovnovážnej polohy v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 je začiatková fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Z rovnice (43) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva harmonické kmity s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{GI}{LI_T}}. \quad (44)$$

Použitím vzťahu medzi uhlovou rýchlosťou a periódou $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a následnou matematickou úpravou môžeme z rovnice (44) vyjadriť modul pružnosti G v tvare

$$G = \frac{4\pi^2 LI_T}{T^2 I}. \quad (45)$$

Ak ako teleso pre torzné kyvadlo využijeme kruhovú dosku (valec) z rovnorodého materiálu, pre moment zotrvačnosti I_T bude platiť

$$I_T = \frac{mD^2}{8}, \quad (46)$$

kde m je hmotnosť a D je priemer valca, ktoré môžeme zistiť priamym meraním. Meraním doby kmitu torzného kyvadla o známom plošnom momente zotrvačnosti závesu torzného kyvadla I (vzťah 34) a známom momente zotrvačnosti telesa I_T (vzťah 46) vieme určiť modul pružnosti G . Pre náš experiment hľadaný modul pružnosti v šmyku bude mať tvar

$$G = \frac{16\pi mLD^2}{T^2 d^4}. \quad (47)$$

Pomôcky

Stojan na upevnenie torzného kyvadla, záves torzného kyvadla, známy zotrvačník (teleso v tvare kruhovej dosky, valca), stopky, digitálne váhy, posuvné meradlo, mikrometrické meradlo.

Postup merania

1. Opakovaným meraním odmeriame priemer D zaveseného telesa tvaru valca, priemer d skúmaného drôtu a dĺžku L závesu torzného kyvadla. Hodnoty zapisujeme do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

| i | d_i (m) | $\Delta_{d_i}^2$ (m ²) | D_i (m) | $\Delta_{D_i}^2$ (m ²) | L_i (m) | $\Delta_{L_i}^2$ (m ²) |
|-----|-------------------|---------------------------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------|---------------------------------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| n | | | | | | |
| | $\bar{d} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{d_i}^2 = \dots$ | $\bar{D} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{D_i}^2 = \dots$ | $\bar{L} = \dots$ | $\sum_{i=1}^n \Delta_{L_i}^2 = \dots$ |

2. Určíme hmotnosť m zotrvačníka, torzného kyvadla.
3. Určíme štandardnú neistotu merania hmotnosti σ_m , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
4. Zostrojíme meraciu aparaturu podľa obrázka 8.
5. Odmeriame teplotu miestnosti pred začiatkom merania ako aj po ukončení merania.
6. Kyvadlo uvedieme do pohybu vychýlením telesa o uhol φ v horizontálnej rovine, kde uhol musí byť malý, tak aby platili pre kmity odvodené rovnice. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov torzného kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 2.

| m (kg) | | | | | |
|----------|----------------|---------|--------------------|--|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | |
| | | | | $\bar{T} = \dots$ | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ |

Vyhodnotenie merania

1. Určíme aritmetické priemery priamo meraných veličín $\bar{D}, \bar{L}, \bar{d}$ a stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{D}}, \sigma_{\bar{L}}, \sigma_{\bar{d}}$.
2. Vypočítame aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T} , strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$.
3. Výsledky merania uvádzame v tvare $m = (m \pm \sigma_{\bar{m}})$, $D = (\bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}})$, $d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}})$, $L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$, $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}})$.
4. Z nameraných hodnôt vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu modulu pružnosti v šmyku G s použitím vzťahu (47), kde za príslušné veličiny dosadíme ich stredné hodnoty.
5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu G pomocou neistôt priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d}\right)^2 (\sigma_d)^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L} &= \frac{16\pi m D^2}{T^2 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial D} &= \frac{32\pi L m D}{T^2 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial m} &= \frac{16\pi L D^2}{T^2 d^4}, \\ \frac{\partial G}{\partial T} &= -\frac{32\pi L m D^2}{T^3 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial d} &= -\frac{64\pi L m D^2}{T^2 d^5}. \end{aligned}$$

6. Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny G najväčšou mierou.
7. Výsledok merania uvedieme v tvare $G = (G \pm \sigma_G)$.
8. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v šmyku G s tabuľkovou hodnotou G_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|G - G_t|}{G_t} 100 \%$$

9. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

SKÚMANIE KMITOV VIAZANÝCH OSCILÁTOROV

Úlohy

A. Určenie základnej frekvencie kyvadiel a sústavy kyvadiel s elastickou väzbou a koeficientu väzby

Teoretický úvod

Najjednoduchší periodický kmitavý pohyb je taký, pri ktorom hmotný bod opakovane prechádza rovnovážnou polohou a pohybuje sa po trajektórii tvaru úsečky. Tento kmitajúci bod sa nazýva **lineárny oscilátor** (napr. závažie zavesené na pružine a pohybujúce sa vo vertikálnej rovine opakovane zvislo nahor a nadol). Ak položíme súradnicovú os y na priamku, po ktorej sa hmotný bod (teleso) s hmotnosťou m pohybuje, môžeme vyjadriť pohyb lineárneho oscilátora rovnicou

$$F = -ky. \quad (1)$$

Sila pružnosti F riadi pohyb, y je výchylka a k je konštanta charakterizujúca pružnú väzbu medzi telesami (hmotnými bodmi) pôsobiacimi na seba silou F (znamienko mínus je v rovnici z dôvodu, že orientácia vektora výchylky oscilátora je opačná ako orientácia vektora sily). V rovnici (1) môžeme za silu F dosadiť podľa druhého Newtonovho pohybového zákona $F = ma$, pričom zrýchlenie môžeme vyjadriť ako druhú deriváciu výchylky podľa času. Po dosadení dostaneme

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0. \quad (3)$$

Rovnica (3) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou a jej riešenie môžeme nájsť v tvare

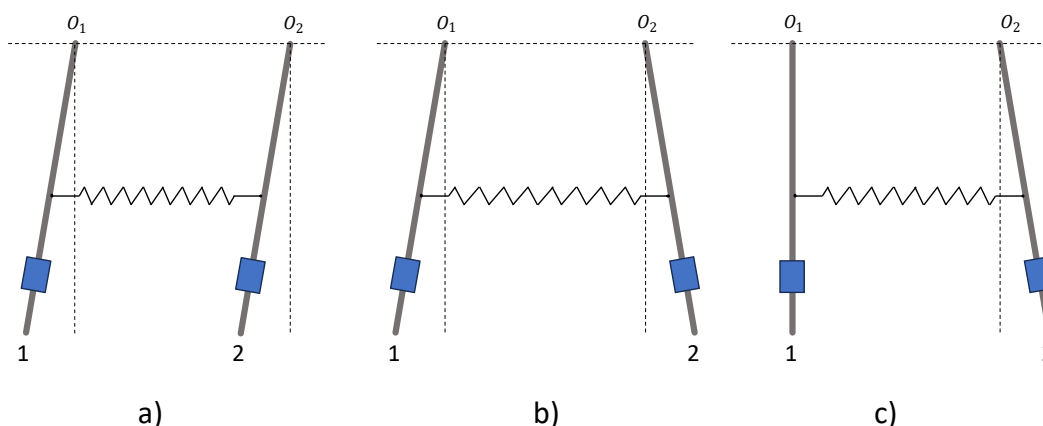
$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4)$$

kde y je okamžitá výchylka v danom čase t , y_m je maximálna výchylka (amplitúda) oscilátora (hmotného bodu) z rovnovážnej polohy, ω je uhlová frekvencia a φ_0 je začiatočná fáza. Jednotkou ω je s^{-1} . Z riešenia rovnice (3) vyplýva $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, φ_0 je začiatočná fáza udávajúca okamžitú výchylku na začiatku počítania času a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Ak teleso (hmotný bod) prechádza cez rovnovážnu polohu po priamke tak, že výchylka je sínusová (kosínusová) funkcia času, tak koná harmonický pohyb a nazýva sa **harmonický oscilátor**.

Ak by sme zanedbali odpor prostredia, v ktorom teleso kmitá a nedokonalosti materiálu pružiny, teleso by vykonávalo **netlmené kmity**. Avšak, v reálnom prípade sa pri každom cykle celková energia oscilátora znižuje o hodnotu, ktorá sa spotrebuje na prekonanie vnútorného trenia v materiáli pružiny a celková energia postupne klesá. Dôsledkom tohto javu nastáva postupné znižovanie amplitúdy až do okamihu, keď sa teleso zastaví v rovnovážnej polohe, teleso koná **tlmený kmitavý pohyb**.

Ak budeme z externého zdroja dodávať tú časť energie, ktorú oscilátor pri každom cykle stratí, môžeme kmitavý pohyb oscilátora udržať. Vonkajšia sila nie je konštantná, lebo celková práca konštantnej sily sa počas jedného cyklu rovná nule. Vonkajšia sila bude počas jedného cyklu konať prácu, iba ak bude meniť svoj smer tak, aby pôsobila vždy v smere pohybu oscilátora. To nastane napríklad v prípade, keď má vonkajšia sila harmonický, napríklad sínusový priebeh $F = F_m \sin \Omega t$, kde F_m je amplitúda sily, Ω je uhlová frekvencia. Vplyvom vonkajšej sily môže oscilátor konať kmitavý pohyb bez zmeny amplitúdy tak dlho, ako dlho pôsobí vonkajšia sila, t. j. oscilátor koná **nútený kmitavý pohyb**. Ak má budiaca sila rovnakú frekvenciu ako vlastné kmity oscilátora, nastane rezonancia. Ak budiaca sila nemá takúto frekvenciu, oscilátor koná nútené kmity v rytme budiacej sily. Táto vonkajšia periodická sila môže mať pôvod v inom oscilátore, ktorý pôsobí na prvý oscilátor. Takéto oscilátory nazývame **viazané alebo spriahnuté oscilátory**.

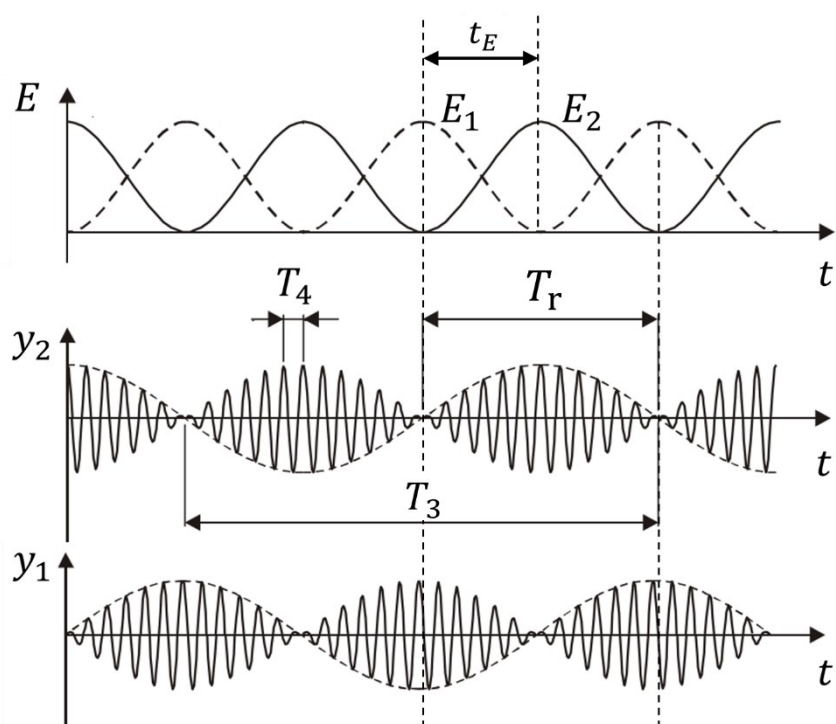
Teoreticky budeme skúmať dva rovnaké oscilátory (fyzikálne kyvadlá) spriahnuté väzbou, ktorá bude vo forme elastickej špirály (elastická väzba). Kyvadlá spojené elasticou špirálou budú kmitať v jednej (vertikálnej) rovine.



Obr. 1. Grafické znázornenie kyvadiel s elasticou väzbou vychýlených a) jedným smerom, b) na opačné smery, c) jedno na začiatku v rovnovážnej polohe a druhé vychýlené

Vychýlime oscilátor 2 z rovnovážnej polohy, zatiaľ čo oscilátor 1 podržíme v jeho rovnovážnej polohe, a potom obidva uvoľníme (Obr. 1.a). Amplitúda výchylky oscilátora 2 sa začne znižovať, pretože sa časť jeho energie prostredníctvom väzby preniesie na oscilátor 1, ktorý sa začne kývať s postupne narastajúcou amplitúdou (Obr. 2.). Prenos energie z oscilátora 2 (E_2) na oscilátor 1 (E_1) pokračuje až do okamihu, keď sa oscilátor 2 zastaví v rovnovážnej

polohe a oscilátor 1 kmitá s takmer rovnakou amplitúdou ako oscilátor 2 na začiatku pokusu. V tomto okamihu je pohybový stav oscilátorov práve opačný ako bol pôvodný stav a dej sa opakuje pri zmenených úlohách obidvoch oscilátorov (Obr. 2.). Energia prechádza z jedného na druhý oscilátor a vplyvom tlmenia sa mechanická energia oscilátorov postupne znižuje. Pri tomto pohybe dvoch oscilátorov dochádza k tzv. **rázom**, čo je špeciálny prípad zloženého kmitania, kedy sa skladajú dve kmitania, ktorých uhlové frekvencie sú veľmi podobné ($\omega_1 \approx \omega_2$) (viac v matematickom odvodení nižšie v texte). Amplitúda takéhoto výsledného kmitania sa periodicky zväčšuje a znižuje. Vo viazaných oscilátoroch dochádza k rázom aj v prípade, že obidva majú rovnakú periódu, t. j. uhlovú frekvenciu. Rázy vznikajú väzbou, a čím je väzba tesnejšia, tým rýchlejšie sa prenáša energia z oscilátora na oscilátor, a tým sú rázy častejšie.



Obr. 2. Časová závislosť výchyliek y_1 , y_2 viazaných oscilátorov 1 a 2 a ich energie E

K rázom a k výmene energie nedochádza iba v prípadoch, keď obidva oscilátory vychýlime na začiatku rovnako jedným smerom (Obr. 1.b) alebo symetricky v opačnom smere (Obr. 1.c). V týchto prípadoch kmity nazývame **základné kmity** alebo tiež **normálne módy** viazaných oscilátorov.

Ak sú oscilátory rozladené (napr. hmotnosť oscilátorov je rôzna, majú rôznu vlastnú frekvenciu, väzbu), tiež bude nastávať prenos energie. V tomto prípade oscilátor, ktorý je prvý vychýlený z rovnovážnej polohy, bude mať najmenšiu amplitúdu odlišnú od nuly a nulovú hodnotu dosiahne iba amplitúda oscilátora, ktorý bol v pokoji na začiatku.

K teoretickému vysvetleniu budeme uvažovať pohyb dvoch harmonických netlmených oscilátorov, ktoré sú z fyzikálneho hľadiska presne rovnaké. A hoci prakticky budeme

vyšetrovať kmitavý pohyb fyzikálnych kyvadiel, na teoretický popis ich pohybu stačí použiť ktorúkoľvek podobu pohybovej rovnice (1) – (3) platnú pre netlmený lineárny oscilátor. Môžeme to urobiť z toho dôvodu, že priemet okamžitej uhlovej výchylky φ kyvadla do horizontálnej roviny v smere osi y sa prejaví ako okamžitá výchylka v smere osi y , časovú závislosť ktorej určuje riešenie rovníc (1) – (3). Kmitavý pohyb fyzikálneho kyvadla s momentom zotrvačnosti I tak môžeme vyšetriť ako pohyb lineárneho oscilátora s hmotnosťou m . Charakter riešenia pohybovej rovnice lineárneho oscilátora je identický s charakterom riešenia pohybovej rovnice fyzikálneho kyvadla zapísanej pomocou uhlovej výchylky φ , ktoré sme uviedli napríklad v úlohe Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla (str. 64). Zmenšovanie amplitúdy kmitania kyvadla v dôsledku tlmenia (najmä v ložiskách, odpor vzduchu) zanedbáme.

Ak nie je medzi oscilátormi väzba, tak takéto nezávislé oscilátory sa pohybujú jednoduchým kmitavým pohybom a pre oscilátory platia nasledujúce pohybové rovnice

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k y_1, \tag{5}$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k y_2.$$

Kde m sú hmotnosti kmitajúcich oscilátorov, y_1 a y_2 sú súradnice v priamkach, po ktorých sa pohybujú hmotné body (v rovnovážnej polohe oscilátorov volíme začiatočné hodnoty tak, aby odpovedali začiatku súradnicovej sústavy $y_1 = 0$, $y_2 = 0$). Obidva oscilátory konajú podľa rovníc (5) harmonické kmity s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ktorú nazývame **vlastná frekvencia** oscilátorov.

Ak medzi oscilátory vložíme väzbu, oscilátory na seba pôsobia prostredníctvom väzby (napr. elastickej špirály, pružiny) rovnako veľkými silami opačného smeru $F_1 = -F_2$. Táto väzba sa nazýva aj pružná a sily sú úmerné rozdielu výchyliek obidvoch oscilátorov $F_1 = F_2 = k_1(y_2 - y_1)$. Ak je medzi oscilátormi, s ktorými sme uvažovali v rovniciach (5) väzba, tak pre oscilátory platia nasledujúce pohybové rovnice

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k y_1 + k_1(y_2 - y_1), \tag{6}$$

$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k y_2 - k_1(y_2 - y_1),$$

kde k_1 je tuhosť väzby medzi oscilátormi. Podľa tretieho Newtonovho pohybového zákona, zákona akcie a reakcie, je sila, ktorou pôsobí jeden hmotný bod na druhý rovnako veľká, opačne orientovaná ako sila ktorou pôsobí druhý hmotný bod na prvý, preto má druhý člen v rovniciach (6) opačné znamienka. Budeme riešiť túto sústavu dvoch lineárnych

diferenciálnych rovníc (6) druhého rádu s konštantnými koeficientami. Preskúmaním zákonitostí takéhoto systému získame prehľad o kmitavých dejoch v ľubovoľnom systéme, opísanom diferenciálnymi rovnicami uvedeného typu (napr. spriahnutých elektrických obvodoch). Rovnice (6) sčítame a odčítame, a tým získame dve samostatné rovnice

$$m \frac{d^2(y_1 + y_2)}{dt^2} = -k(y_1 + y_2), \quad (7)$$

$$m \frac{d^2(y_1 - y_2)}{dt^2} = -(k + 2k_1)(y_1 - y_2).$$

Zavedieme substitúciu $(y_1 + y_2) = x_1$, $(y_1 - y_2) = x_2$ a dostaneme rovnice

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1, \quad (8)$$

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -(k + 2k_1)x_2.$$

Dostali sme rovnice harmonických kmitov s frekvenciami $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$, ktoré sa skladajú. Frekvencie ω_1 , ω_2 nazývame základné frekvencie viazaných oscilátorov a rovnice (8) môžeme pomocou frekvencií ω_1 , ω_2 napísať v tvare

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1, \quad (9)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_2.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnych rovníc (9) má tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t, \\ x_2 &= B_1 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \end{aligned} \quad (10)$$

kde A_1, A_2, B_1, B_2 sú integračné konštanty dané počiatočnými podmienkami kmitavého pohybu.

Pre hľadané výchylky platí

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t), \\ y_2 &= \frac{1}{2} (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t - B_1 \sin \omega_2 t - B_2 \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Integračné konštanty A_1, A_2, B_1, B_2 určíme zo začiatočných podmienok nasledovne. Ak kyvadlá budeme vždy púšťať z pokoja, teda v čase $t = 0$ s sú oscilátory v pokoji,

ich rýchlosti sú rovné nule, t. j. $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0$. Vyjadríme derivácie $\frac{dy_1}{dt}$ a $\frac{dy_2}{dt}$ z rovníc (11), tieto položíme pre $t = 0$ s rovné nule a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= A_1\omega_1 + B_1\omega_2, \\ 0 &= A_1\omega_1 - B_1\omega_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Konštanty ω_1, ω_2 sú rôzne od nuly, takže z rovníc (12) vyplýva, že $A_1 = B_1 = 0$.

a)

Ak v čase $t = 0$ s vychýlime oscilátory rovnakým smerom do hodnoty $y_1 = y_2 = y_m$ (Obr. 1.b), kde y_m je maximálna výchylka oscilátora, tak z rovníc (11) a podmienky pre nulovú začiatočnú rýchlosť ($A_1 = B_1 = 0$) vyplýva, že $A_2 = 2y_m, B_2 = 0$ a pre výchylky oscilátorov v tomto prípade platí

$$y_1 = y_2 = y_m \cos \omega_1 t. \quad (13)$$

Oscilátory kmitajú súhlasne s tou základnou frekvenciou viazaných oscilátorov, ktorá je rovná ich vlastnej frekvencii ω_1 . Kyvadlá majú v ktoromkoľvek okamihu rovnakú výchylku, čiže sa väzba medzi nimi neuplatňuje.

b)

Ak v čase $t = 0$ s vychýlime oscilátory na opačné strany do hodnoty $y_1 = -y_2 = y_m$ (Obr. 1.c), potom z rovníc (11) a podmienky pre nulovú začiatočnú rýchlosť ($A_1 = B_1 = 0$) dostaneme $A_2 = 0, B_2 = 2y_m$ a pre okamžité výchylky oscilátorov v tomto prípade platí

$$\begin{aligned} y_1 &= y_m \cos \omega_2 t, \\ y_2 &= -y_m \cos \omega_2 t. \end{aligned} \quad (14)$$

Obidva oscilátory kmitajú s rovnakou uhlovou frekvenciou ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$), čo je druhá základná frekvencia viazaných oscilátorov. Kmity oscilátorov sú navzájom fázovo posunuté o π . Obidve kyvadlá sa pohybujú v protifáze (keď má jedno maximálnu výchylku vpravo, druhé má maximálnu výchylku vľavo) s rovnakou amplitúdou.

c)

Jeden oscilátor necháme na začiatku v rovnovážnej polohe a druhý vychýlime o y_m (Obr. 1.a), t. j. v čase $t = 0$ s bude $y_1 = 0, y_2 = y_m$. Z rovníc (11) a podmienky pre nulovú začiatočnú rýchlosť dostaneme $A_2 = y_m, B_2 = -y_m$ a pre výchylky jednotlivých oscilátorov platia rovnice

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y_m}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \\ y_2 &= \frac{y_m}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{aligned} \quad (15)$$

Matematickou úpravou použitím súčtových vzorcov pre kosínus dostaneme

$$y_1 = \left(y_m \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \quad (16)$$

$$y_2 = \left(y_m \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

Do rovníc (16) zavedieme substitúciu

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad (17)$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

a matematickou úpravou dostaneme rovnice v tvare

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_m \sin \omega_3 t) \sin \omega_4 t, \\ y_2 &= (y_m \cos \omega_3 t) \cos \omega_4 t. \end{aligned} \quad (18)$$

Výsledné kmitanie možno považovať za harmonické s periodicky meniacou sa amplitúdou. Hovoríme, že vznikajú rázy. Sú to kmitavé pohyby s jednoduchým fyzikálnym významom, keď frekvencie ω_1 , ω_2 sú veľmi podobné (rozdiel frekvencií $\omega_1 - \omega_2$ nie je veľmi veľký), čo pri viazaných oscilátoroch predstavuje slabú väzbu $k_1 \ll k$. Z toho vyplývajú nasledujúce predpoklady, pri ktorých môžeme pozorovať rázy, $\omega_1 \approx \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$, z čoho plynie, že $\omega_3 \ll \omega_4$.

Zo vzťahu (18) vidíme, že amplitúda kyvadiel sa mení harmonicky s časom, hovoríme, že je modulovaná. Uhlovú frekvenciu ω_3 nazývame modulačná uhlová frekvencia. A príslušnú periódu nazývame modulačná perióda, pre ktorú platí

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (19)$$

Amplitúda prvého kyvadla sa mení s časom podľa vzťahu $(y_m \sin \omega_3 t) = y_m \cos(\omega_3 t - \pi/2)$. Modulovanie amplitúd je posunuté o $\pi/2$ (alebo o štvrtinu periódy) a obidve kyvadlá kývajú s periódou

$$T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (20)$$

Na obrázku (Obr. 2) môžeme sledovať časovú závislosť kmitov obidvoch viazaných oscilátorov a ich energie. Doba za ktorú nastane výmena energie z jedného kyvadla na druhé a späť sa rovná **perióde rázov**

$$T_r = \frac{T_3}{2} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (21)$$

Pre uhlovú frekvenciu rázov platí $\omega_r = 2\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$. Frekvencia výmeny energie medzi kyvadlami je $f_r = \frac{1}{T_r}$. V čase $t = 0$ s je amplitúda kmitov druhého kyvadla nulová a prvého kyvadla je maximálna a postupom času amplitúda kmitov druhého kyvadla narastá a je maximálna pre takú dobu t_E , pre ktorú platí

$$t_E = \frac{T_r}{2} = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (22)$$

Je to **doba výmeny energie**, počas ktorej prvé kyvadlo odovzdalo svoju energiu druhému, pričom táto výmena energie medzi kyvadlami prebieha neustále.

Výsledné kmitanie každého oscilátora môžeme považovať za sínusové s vysokou frekvenciou ω_4 , ktorého amplitúda ($y_m \sin \omega_3 t$), respektíve ($y_m \cos \omega_3 t$), nie je konštantná, mení sa medzi nulou a y_m s nízkou frekvenciou ω_3 . Vznikajú teda rázy. Výsledné kmitanie každého oscilátora má periódu $T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4}$ a jeho amplitúda výchylky sa mení s veľkou periódou $T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3}$. Amplitúda výchylky prvého oscilátora sa mení s funkciou $\sin \omega_3 t$ a druhého oscilátora s funkciou $\cos \omega_3 t$, minimum výchylky prvého oscilátora je v okamihu maximálnej výchylky druhého oscilátora.

Na vyjadrenie sily väzby používame pomer $\gamma = \frac{k_1}{k_1 + k'}$, nazývaný **stupeň väzby**. Pomocou základných frekvencií viazaných oscilátorov ω_1 a ω_2 alebo základných periód T_1 a T_2 môžeme stupeň väzby vyjadriť nasledovne

$$\gamma = \frac{k_1}{k_1 + k} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (23)$$

Stupeň väzby viazaných oscilátorov môžeme taktiež vyjadriť pomocou periódy T_4 kmitov každého oscilátora a periódy rázov T_r (alebo uhlových frekvencií ω_4 a ω_r)

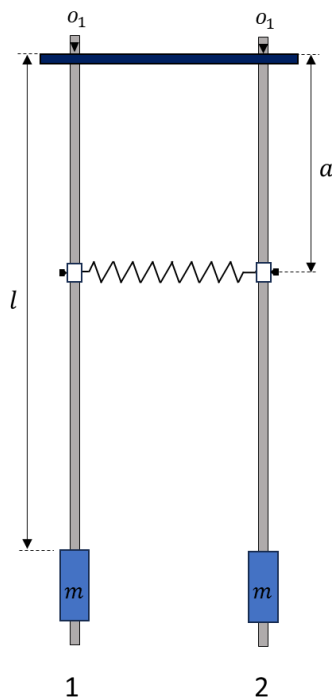
$$\gamma = \frac{4\omega_4\omega_r}{\omega_r^2 + 4\omega_4^2} = \frac{4T_4T_r}{T_r^2 + 4T_4^2}. \quad (24)$$

A. Určenie základnej frekvencie kyvadiel a sústavy kyvadiel s elastickou väzbou a koeficientu väzby

Viazané harmonické oscilátory môžeme realizovať použitím dvoch fyzikálnych kyvadiel, ktoré kmitajú v tej istej rovine (Obr. 3). Kyvadlá sú zostavené z kovovej tyče s valcom, ktorého poloha sa dá meniť jeho posúvaním po tyči, a tým môžeme meniť frekvenciu kmitov kyvadiel, t. j. dobu kmitu.

Väzbu realizujeme použitím ocelevej pružiny, ktorej konce môžeme upevniť na tyčiach v rôznych vzdialenostiach od osí otáčania (O_1, O_2). Na každej tyči je umiestnený posúvací

valček s upínacou skrutkou a očkom na prichytenie ocelevej pružiny. Aby bola väzba slabá, musí byť tuhosť pružiny k_1 v rovnici $F_1 = k_1(y_2 - y_1)$ oveľa menšia ako tuhosť k (konštanta charakterizujúca pružnú väzbu telesa/kyvadla so závesom) z rovníc (5). Posúvaním pružiny smerom nadol od osí otáčania sa väzba zosilňuje, smerom nahor zoslabuje. Rám, na ktorom máme kyvadlá upevnené, musí byť pevný, aby svojimi pohybmi nerealizoval ďalšiu väzbu medzi kyvadlami. Zariadenie na meranie sa minimálne odlišuje od tej, ktorú sme teoreticky skúmali. Ale pri malom počte kmitov, aby sme mohli zanedbať tlmenie a pri malom rozkmitne, spĺňa požiadavky, s ktorými sme uvažovali v teoretickej časti.



Obr. 3. Schéma zariadenia na skúmanie spriahnutých oscilátorov

Pomôcky

Meracia aparátúra, ktorej súčasťou sú dve fyzikálne kyvadlá s možnosťou prichytenia väzby, elastická väzba (pružina), stopky, dĺžkové meradlo.

Postup merania

1. Vo všetkých prípadoch merania doby kmitu kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Kyvadlo by malo kmitať iba v rovine kolmej na vodorovnú rovinu. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty času zapisujeme do tabuľky 1, kde hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď. Podobný zápis urobíme pre všetky prípady meraného kyvadla.

Tabuľka 1.

| l (m) | | m (kg) | | a_i (m) | | Skúmaný prípad | |
|---------|----------------|----------|--------------------|--|--|--|--|
| i | t_{i*10} (s) | $i + 5$ | $t_{(i+5)*10}$ (s) | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s) | | $\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²) | |
| 1. | t_{10} | 6. | t_{60} | $T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$ | | | |
| 2. | t_{20} | 7. | t_{70} | $T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$ | | | |
| 3. | t_{30} | 8. | t_{80} | | | | |
| 4. | t_{40} | 9. | t_{90} | | | | |
| 5. | t_{50} | 10. | t_{100} | | | | |
| | | | | $\bar{T} = \dots$ | | $\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$ | |

- Odmeriame základné rozmery spriahnutých kyvadiel, t. j. vzdialenosť závažia od osi otáčania l a hmotnosť m závažia. Vzdialenosť závažia od osi otáčania l volíme pre oba závesy rovnakú.
- Určíme štandardné neistoty merania hmotnosti σ_m a vzdialenosti závažia σ_l pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
- Meranie realizujeme najskôr pre neviazané oscilátory. Posuvné valce nastavíme na tyčiach kyvadiel do rovnakej vzdialenosti l od osi otáčania a odstránime pružinu. Meraním overíme, či je zhodná doba kmitu obidvoch kyvadiel. Ak sa doba kmitu nebude zhodovať, posunieme valec na jednej z tyčí tak, aby sme v rámci chýb merania času dosiahli uspokojivú zhodu.
- Meriame vlastnú dobu kmitu oboch oscilátorov, t. j. periódu T_1 jedného z kyvadiel. *Pozn.: Po určení periódy T_1 pridáme elastickú väzbu (pružinu). Najlepšiu zhodu dosiahneme, ak bude frekvencia ω_3 približne 20-krát väčšia ako ω_4 , čiže doba kmitu každého oscilátora T_2 približne 20-krát kratšia ako doba T_3 medzi dvoma po sebe idúcimi minimami kmitov jedného oscilátora.*
- V rovnakej vzdialenosti a_i od osi otáčania upevníme na obidve kyvadlá elastickú väzbu. Pri prvom meraní si zvolíme polohu väzby približne v polovici dĺžky tyče.
- Vychýlime obidve kyvadlá na jednu stranu (Obr. 1.b) o rovnakú výchylku y_m (o rovnaký uhol) a súčasne ich pustíme. Meraním periódy jedného z kyvadiel určíme dobu kmitu oscilátorov T_{1i} . Porovnáme hodnotu doby kmitu získanú meraním bez väzby (krok 5 v postupe merania) s hodnotou získanou meraním s väzbou. *Poznámka ku presnosti merania: Rovnosť dôb kmitu oboch kyvadiel je nutnou podmienkou k presnému meraniu. Potom sa dá pri porovnaní dôb kmitov T_1 oscilátora bez väzby a oscilátorov viazaných a kmitajúcich rovnakým smerom a pri overení druhého vzťahu (17) dosiahnuť presnosť 1%. Pri overovaní prvého*

vztahu je chyba okolo 10 %. Presnosť merania doby kmitu T_3 , z ktorej sa určí ω_3 , je oveľa menšia ako presnosť merania ostatných dôb kmitu. Hodnotu T_3 je potrebné určiť ako dobu medzi dvoma za sebou nasledujúcimi minimami amplitúd výchylky oscilátora, ale stanoviť presný okamih minima amplitúdy je ťažšie. Presnosť merania T_3 sa nedá zmeniť ani tak, že by sme merali dobu niekoľkých rázov, pretože charakter kmitavého pohybu býva v danom usporiadaní po niekoľkých rázoch výrazne narušený.

8. Vychýlime obidve kyvadlá do opačných smerov (Obr. 1.c) o rovnakú výchylku y_m (o rovnaký uhol) a súčasne ich pustíme. Meriame dobu kmitu T_{2i} jedného kyvadla.
9. Vychýlime jedno kyvadlo o výchylku y_m , druhé podržíme v rovnovážnej polohe a súčasne ich pustíme (Obr. 1.a). Viazané oscilátory vykonávajú kmitavý pohyb, kedy sa ich výchylky menia podľa vzťahov (18). Meriame periódu T_{ri} ako dobu medzi po sebe nasledujúcimi minimami alebo maximami výchylky jedného kyvadla. Pri určovaní periódy rázov nepoužívame postupnú metódu.
10. Určíme štandardnú neistotu merania periódy rázov $\sigma_{\bar{T}_{ri}}$, pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
11. Vychýlime jedno kyvadlo o rovnakú výchylku y_m ako sme zvolili v kroku 9 postupu merania, druhé kyvadlo podržíme v rovnovážnej polohe a súčasne ich pustíme (Obr. 1.a). Meriame dobu kmitu T_{4i} jedného z kyvadiel. Alebo meranie T_{ri} a T_{4i} uskutočníme naraz.
12. Vychýlime jedno z kyvadiel (druhé ostáva v pokoji) a pustíme ho. Kmitajúce kyvadlo odovzdáva energiu druhému kyvadlu. Druhé kyvadlo sa postupne rozkmitáva, až je jeho výchylka maximálna. Výchylka prvého kyvadla je vtedy nulová. Všetka energia prešla do druhého kyvadla. Meriame dobu výmeny energie t'_{Ei} .
13. Po určení periód T_1, T_2, T_r, T_4 a doby výmeny energie t'_E pre danú vzdialenosť pružiny od osi otáčania a_i kyvadlo zastavíme a zmeníme túto vzdialenosť umiestnením elastickej väzby do ďalšej vzdialenosti. Počet tabuliek pre každú periódu bude rovnaký, ako zvolený počet rôznych vzdialeností.
14. Postup vedúci k určeniu periód oscilátorov opakujeme pre aspoň 3 rôzne vzdialenosti a_i osi otáčania a príslušnej elastickej väzby. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuliek.

Vyhodnotenia merania

1. Pre každú tabuľku nameraných hodnôt určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla $\bar{T}_{1i}, \bar{T}_{2i}, \bar{T}_{4i}$ a k nim prislúchajúce stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}_{1i}}, \sigma_{\bar{T}_{2i}}, \sigma_{\bar{T}_{4i}}$.

2. Výsledok určenia períód kmitov pre dané parametre spriahnutých oscilátorov uvádzame v tvare $T_{1i} = (\bar{T}_{1i} \pm \sigma_{\bar{T}_{1i}})$, $T_{2i} = (\bar{T}_{2i} \pm \sigma_{\bar{T}_{2i}})$, $T_{4i} = (\bar{T}_{4i} \pm \sigma_{\bar{T}_{4i}})$, $T_{ri} = (\bar{T}_{ri} \pm \sigma_{\bar{T}_{ri}})$.
3. Z nameraných a vypočítaných priemerných hodnôt príslušných períód \bar{T}_{1i} , \bar{T}_{2i} určíme pre príslušnú vzdialenosť a_i príslúchajúce parciálne uhlové frekvencie, hodnoty zaznamenávame do tabuľky 2. Určíme vlastnú uhlovú frekvenciu oscilátorov ω_{1i} a druhú základnú frekvenciu oscilátorov ω_{2i} využitím vzťahu

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}.$$

4. Porovnanie základných uhlových frekvencií ω_1 a ω_2 realizujeme aj vo forme grafu $\omega = f(a)$.
5. Z určených hodnôt základných uhlových frekvencií ω_1 a ω_2 dosadením do vzťahu (23) vypočítame stupeň väzby γ_i pre danú vzdialenosť a_i .
6. Pomocou vzťahu (17) vypočítame uhlové frekvencie ω_r a ω_4 .
7. Z určených hodnôt uhlových frekvencií ω_r a ω_4 vypočítame stupeň väzby γ'_i dosadením do vzťahu (24) a porovnáme hodnoty s meraním v bode 5 postupu vyhodnotenia.
8. Vyjadríme závislosť stupňa väzby γ_i od vzdialenosti a_i vo forme grafu $\gamma = f(a)$.
9. Vyjadríme závislosť periódy rázov T_{ri} od stupňa väzby γ_i formou grafu $T_r = f(\gamma)$.
10. Výpočtom určíme dobu prenosu energie t_{Ei} využitím vzťahu (22) a porovnáme ho s experimentálne určenou hodnotou t'_{Ei} .
11. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

Tabuľka 2.

| i | a_i (m) | \bar{T}_{1i} (s) | ω_1 (s ⁻¹) | \bar{T}_{2i} (s) | ω_2 (s ⁻¹) | γ_i |
|-----|-----------|--------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | |
| n | | | | | | |

Tabuľka 3.

| i | a_i (m) | T_{ri} (s) | ω_r (s ⁻¹) | \bar{T}_{4i} (s) | ω_4 (s ⁻¹) | γ'_i | t_{Ei} (s) |
|-----|-----------|--------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|-------------|--------------|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| n | | | | | | | |

SKÚMANIE STOJATÉHO VLNENIA NA STRUNE

Úlohy

A. Odmerať základnú a vyššie rezonančné frekvencie pre rôzne hodnoty napínacej sily a porovnať ich s hodnotami vyplývajúcimi z teórie

Teoretický úvod

Kmitavý pohyb alebo **kmitanie** je všeobecne taký pohyb hmotného bodu (telesu), pri ktorom bod neprekročí istú konečnú vzdialenosť od rovnovážnej polohy (amplitúdu). V rovnovážnej polohe sú všetky sily pôsobiace na hmotný bod navzájom v statickej rovnováhe. Je to taká poloha, ktorú by hmotný bod zaujal, keby bol v pokoji. Ak sa kmitavý pohyb opakuje po rovnako veľkom časovom intervale T (perióde), nazývame ho **kmitavý periodický pohyb**. Prevrátená hodnota periódy T sa nazýva frekvencia f a vyjadruje koľkokrát sa kmit alebo iný periodický dej zopakuje za jednu sekundu. Jednotkou frekvencie f je $s^{-1} = \text{Hz}$.

Proces, prostredníctvom ktorého sa z jedného miesta prostredia prenáša kmitavý pohyb hmotného bodu na iný hmotný bod a postupne do celého prostredia bez toho, aby sa presúvali samotné kmitajúce hmotné body, nazývame vlnenie, presnejšie, postupné vlnenie alebo postupná vlna. Prostredie, v ktorom sa mechanické vlnenie šíri nazývame pružné. Takéto „šírenie kmitov“ alebo vlny môže nastávať prakticky v každej látke (tuhej, kvapalnej i plynnej). Vlny sa šíria v pružných prostrediach v tuhých látkach a kvapalinách v dôsledku silového pôsobenia medzi atómami, resp. molekulami. V plynch sa napríklad vlny šíria v dôsledku stlačiteľnosti plynu ako zmena tlaku. Vo všeobecnosti môžeme považovať vlny za fyzikálny proces, pri ktorom dochádza k prenosu energie medzi kmitajúcimi časťami prostredia bez toho, aby prebiehal aj prenos látky v smere šírenia vlny. Vlnenie je charakterizované periódou T , frekvenciou f a vlnovou dĺžkou λ . Vlnová dĺžka je určená vzdialenosťou, ktorú vlnenie prejde za dobu jednej periódy, čiže $\lambda = vT$, kde v je rýchlosť, ktorou sa vlnenie v danom prostredí šíri. Rýchlosť v môžeme pomocou vlnovej dĺžky λ a frekvencie f vyjadriť nasledovným vzťahom

$$v = f\lambda. \quad (1)$$

V prostredí sa môžu súčasne šíriť viaceré vlny. V tej oblasti prostredia, v ktorej sa vlnenia prekrývajú, nastáva skladanie (interferencia) vln, ktoré sa prejavuje tým, že výsledný kmitavý pohyb hmotných elementov prostredia, ktorým sa šíria vlny, má v niektorých miestach väčšiu, v iných miestach menšiu amplitúdu, ktorá bude závisieť od rozdielu fáz skladaných kmitov a ich amplitúd v danom mieste.

Skúmame prípad interferencie (skladania) dvoch vln s rovnakou amplitúdou a frekvenciou šíriacich sa rýchlosťou v oproti sebe v rade bodov. Nech sa obe vlnenia stretávajú v čase $t = 0 \text{ s}$ v mieste O so súradnicou x tak, že medzi kmitmi hmotných bodov prislúchajúcich obidvom vlnám nie je v tomto mieste fázový posun. Tento prípad popisujú nasledujúce

rovnice. Okamžitá výchylka vlnenia šíriaceho sa vpravo (v kladnom smere osi x) je určená vzťahom

$$y_1(x, t) = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (2)$$

Okamžitá výchylka vlnenia šíriaceho sa vľavo (v zápornom smere osi x) je určená vzťahom

$$y_2(x, t) = y_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (3)$$

Výsledná okamžitá výchylka v danom mieste so súradnicou x je určená súčtom oboch okamžitých výchyliek jednotlivých vln

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2y_m \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \right). \quad (4)$$

Zo vzťahu (4) je zrejmé, že vo všetkých polohách bodovej rady vzniknú jednoduché harmonické kmity s rovnakou fázou, ale výsledná amplitúda y_v týchto kmitov závisí od vzdialenosti x od bodu, ktorý sme si zvolili ako začiatok O

$$y_v = 2y_m \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \right). \quad (5)$$

Amplitúda bude najväčšia v miestach, pre ktoré platí

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1, \text{ teda pre } x = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{2\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots \quad (6)$$

Body, ktoré kmitajú s najväčšou amplitúdou a sú od začiatku O vo vzdialenostiach rovných celému násobku polovice vlnovej dĺžky alebo párnemu násobku štvrtiny vlnovej dĺžky λ , nazývame **kmitne**. Medzi kmitňami ležia **uzly**, t. j. miesta, v ktorých sú body v pokoji. Amplitúda uzlov je stále nulová, $y_v = 0$, za podmienky

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0, \text{ teda pre } x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \pm \frac{5\lambda}{4}, \dots \quad (7)$$

Uzly vznikajú v miestach, v ktorých súradnica x nadobúda hodnotu rovnú nepárnemu násobku štvrtiny vlnovej dĺžky λ . Zo vzťahov (4) a (5) vidíme, že výsledné vlnenie, ktoré vzniklo superpozíciou proti sebe postupujúcich rovnakých vln, nepostupuje v smere a ani proti smeru osi x . Takéto vlnenie nazývame **stojaté vlnenie**. Pri stojatom vlnení kmitajú všetky body prostredia s rovnakou fázou vo všetkých bodoch vzdialených od seba o vlnovú dĺžku, s opačnou fázou v bodoch vzdialených o polovicu vlnovej dĺžky, ale s amplitúdou y_v periodicky závislou od polohy bodu v priestore, vzťah (5). Ak dochádza k vytvoreniu stojateho vlnenia v bodovej rade obmedzenej na oboch stranách v dôsledku odrazov postupných vlnení na koncoch bodovej rady, nazývame ho tiež **chvenie** (napr. struna, tyč, ...). Ak má bodový rad obidva konce pevné, môžeme pozorovať vznik iba stojatej vlny s uzlami na oboch koncoch

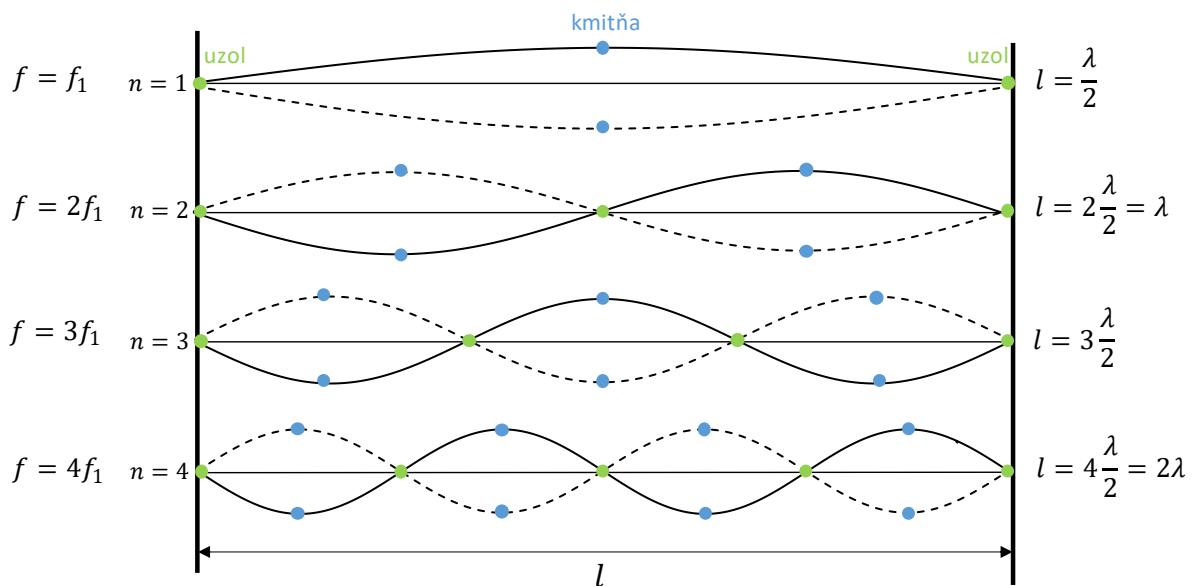
(Obr. 1.). Pretože sú dva susedné uzly vzdialené o polovicu vlnovej dĺžky, musí byť na celej dĺžke l bodovej rady celočíselný počet polvln, teda

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Frekvencia chvenia radu potom bude

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} v, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

kde v je rýchlosť šírenia sa vln bodovou radou.



Obr. 1. Grafické znázornenie stojateho vlnenia na strune s dvoma pevnými koncami

Chvenie s počtom polvln $n = 1$ nazývame základným alebo chvením so základnou frekvenciou, chveniu s počtom polvln $n = 2, 3, \dots$ hovoríme chvenie s vyššími harmonickými frekvenciami. Vyššie frekvencie chvenia, ktoré sú celočíselným násobkom základnej frekvencie, $f_n = n f_1$, $n > 1$, sa teda nazývajú vyššími harmonickými. Okrem základného chvenia vznikajú vždy i chvenia s vyššími harmonickými frekvenciami, pričom o ich počte a ich amplitúde (intenzite) rozhoduje spôsob rozochvenia príslušného útvaru. Napr.: strunu môžeme rozochvieť sláčikom (husle), brnknutím (gitara), úderom (klavír) a pod.

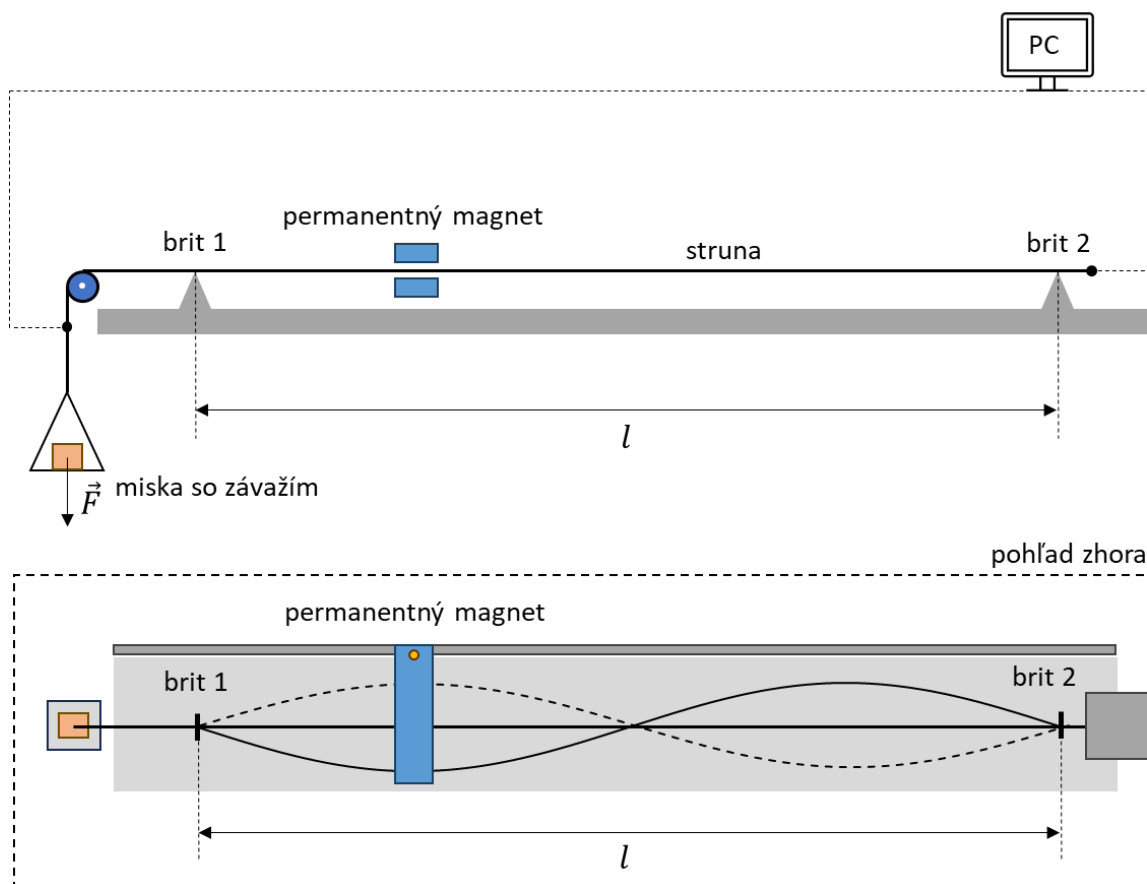
Ak pôsobíme na niektoré miesto struny (nie však uzol) harmonickou silou, ktorej frekvencia odpovedá niektorej z frekvencií f_n , nastane rezonancia a struna sa začne chvieť s touto frekvenciou. Okrem toho môžeme rezonančnú frekvenciu meniť zmenou veľkosti sily F , ktorá strunu napína.

Poznámka: Pri rezonancii všetky body sústavy kmitajú s jednou frekvenciou, rezonančnou frekvenciou, a v rôznych miestach sústavy majú rôznu amplitúdu, ktorá, ak neprihliadame k tlmeniu, je stála.

Budeme skúmať stojaté vlnenie (chvenie) vytvorené na strune. Struna je útvár, ktorého priečne rozmery voči dĺžke môžeme zanedbať. Nech struna má dĺžku l , potom jej jednotka dĺžky má hmotnosť $\mu = \frac{m}{l}$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$), kde veličinu μ nazývame lineárna hustota. Ak vyjadríme hmotnosť m struny pomocou objemu struny $V = \frac{\pi d^2}{4} l$ (struna má tvar valca, teda použijeme objem valca) a objemovej hustoty ρ materiálu struny, dostaneme vzťah pomocou ktorého môžeme určiť lineárnu hustotu struny $\mu = \frac{\pi d^2 \rho}{4}$. Vlnenie sa v strune, ktorá je napínaná silou F , šíri rýchlosťou

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (10)$$

Popíšeme si jedno z možných zariadení na skúmanie rezonančného chvenia struny (Obr. 2.). Struna z elektricky vodivého materiálu je na jednom konci upevnená a na druhom konci je vedená cez kladku a napínaná miskou so závažím. Struna je napínaná medzi pólmi magnetu, ktorý je možné pozdĺž struny posúvať. Chvenie struny budíme tak, že strunou necháme prechádzať striedavý prúd so známou frekvenciou. V poli magnetu potom na strunu pôsobí harmonická sila frekvencie f , ktorá smeruje kolmo na strunu a zároveň kolmo na smer magnetického poľa.



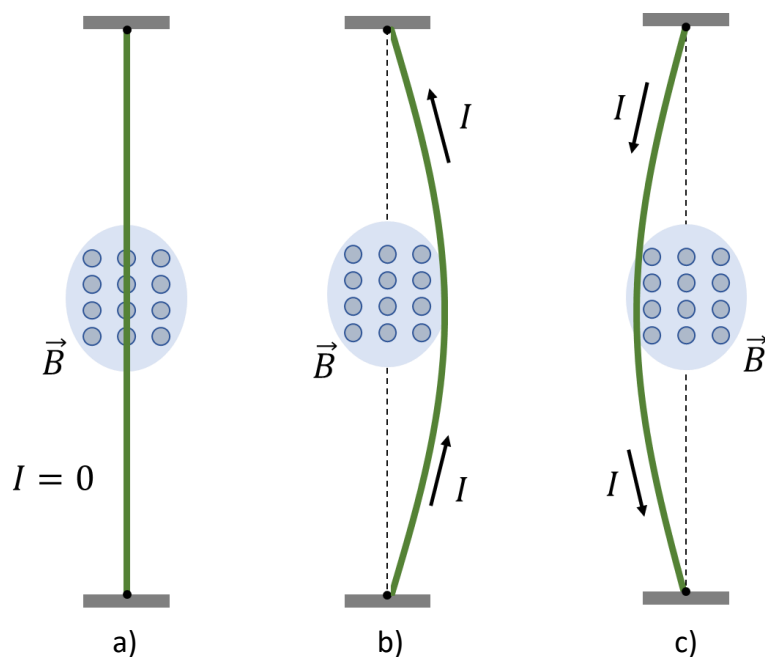
Obr. 2. Schéma zapojenia pre skúmanie stojatého vlnenia na strune pri pohľade na zapojenie z boku a zhora

Pri konštantnej veľkosti napínacej sily F môžeme sledovať závislosť frekvencie chvenia f_n od rádu n ($f_n = kn$, kde k je konštanta). Závislosť overujeme tak, že magnet umiestnime do predpokladanej polohy kmitne chvenia toho rádu, ktorý chceme skúmať. Pre chvenie nepárneho rádu (s nepárnym počtom kmitní) umiestňujeme magnet vždy do polohy odpovedajúcej polovici vzdialenosti medzi miestami upevnenia struny. Pre chvenia párnych rádoch (s párnym počtom kmitní) volíme umiestnenie magnetu na iné miesto, napr. pre $n = 2$ do polohy odpovedajúcej štvrtine vzdialenosti l od jedného z miest upevnenia struny (Obr. 2., pohľad zhora). Pre dané nastavenie magnetu určujeme frekvenciu, pri ktorej bude amplitúda chvenia maximálna. Táto frekvencia sa rovná hľadanej rezonančnej frekvencii chvenia struny f_n .

Pri konštantnej frekvencii f budiacej sily môžeme zmenou napínacej sily F dosiahnuť vhodné podmienky pre chvenie struny pri rôznych rádoch n .

Dĺžka struny l je určená vzdialenosťou bodov upevnenia, t. j. britmi 1 a 2. Napínacia sila F sa rovná súčtu tiaží závažia hmotnosti m_i uloženého na miske a samotnej misky o hmotnosti m_0 , t. j. $F = (m_0 + m_i)g$. Počítač vo funkcii generátora striedavého prúdu vytvára v strune striedavý (harmonický) elektrický prúd $I = I_0 \cos \omega t$.

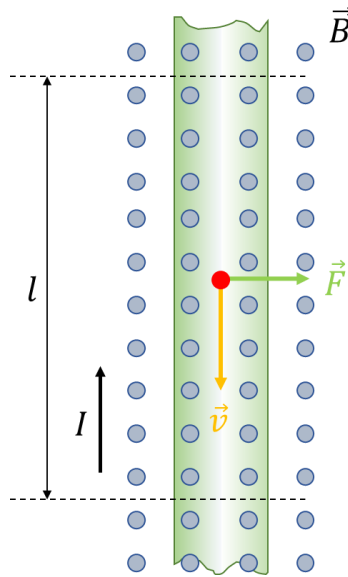
V ďalšom si ukážeme, ako magnetická sila pôsobí na ohybný vodič s prúdom umiestnený v poli permanentného magnetu (v našom prípade na strunu). Magnetické pole pôsobí silou na pohybujúce sa elektróny vo vodiči. Pretože vodivostné elektróny nemôžu vodič opustiť, prenáša sa táto sila na samotný vodič.



Obr. 3. Vodič s prúdom umiestnený medzi pólovými nadstavcami magnetu v prípade, že a) vodičom neprechádza prúd, b) a c) smer prúdu je rôzny

Predstavme si vodič upevnený na obidvoch koncoch, ktorým preteká elektrický prúd a nachádza sa medzi pólovými nastavcami magnetu, ktorého magnetické pole je kolmé na rovinu obrázku a smeruje k nám (Obr. 3.). Podľa toho, aký je smer prúdu, tak sa vychýli vodič doprava alebo doľava. Ak vodičom neprechádza prúd, je vodič rovný. Sledujme pohyb jedného z vodivostných elektrónov (Obr. 4.). Elektrón sa pohybuje rýchlosťou v smerom nadol. Podľa rovnice, ktorá vyjadruje Lorentzovu silu vo všeobecnom tvare

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (11)$$



Obr. 4. Detailný pohľad na časť vodiča s prúdom v magnetickom poli

pre uhol $\varphi = 90^\circ$ bude na elektrón pôsobiť sila \mathbf{F} s veľkosťou $F = QvB \sin \varphi = QvB$ so smerom kolmým k smeru rýchlosti elektrónu \mathbf{v} . Elektrický prúd tečie smerom nahor, čiže elektróny sa pohybujú driftovým pohybom smerom dole. Magnetické pole kolmé na rovinu obrázka má smer k nám a spôsobuje, že elektróny aj s vodičom sú vychýľované smerom doprava. Ak by sme zmenili smer magnetického poľa alebo smer elektrického prúdu, zmenil by sa smer sily pôsobiacej na vodič a tá by smerovala doľava. T. j. výsledok nezáleží na tom, či uvažujeme záporné náboje pohybujúce sa vo vodiči smerom dole alebo kladné náboje pohybujúce sa smerom hore. Smer vychýľujúcej sily je rovnaký.

Uvažujeme úsek l priameho vodiča. Na tomto úseku sa budú elektróny pohybovať driftovou rýchlosťou kolmo na prierez vodiča za časový interval $t = \frac{l}{v}$. Za tento časový interval prejde prierezom vodiča náboj $Q = It = I \frac{l}{v}$. Po dosadení za Q do rovnice $F = QvB$ dostaneme

$$F = QvB \sin \varphi = I \frac{l}{v} vB \sin 90^\circ = IlB. \quad (12)$$

Rovnica (12) určuje silu, ktorou pôsobí magnetické pole s indukciou \mathbf{B} na úsek priameho vodiča dĺžky l ležiaceho v rovine kolmej na \mathbf{B} , ktorým preteká prúd I . Ak nie je magnetické pole kolmé na smer dĺžky vodiča, bude platiť pre magnetickú silu \mathbf{F} všeobecná rovnica

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (13)$$

kde vektor dĺžky \mathbf{l} má smer totožný so smerom prúdu I , uhol φ je uhol, ktorý zvierá vektor \mathbf{l} so smerom magnetickej indukcie \mathbf{B} . Ak vodič nie je priamy, môžeme ho rozdeliť na infinitezimálne dĺžkové elementy $d\mathbf{l}$ a pre každý použiť rovnicu ($\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$), takže bude platiť

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (14)$$

Výslednú silu vyjadrenú z tejto rovnice nazývame **Ampérova sila**.

Táto sila je zdrojom priečného postupného vlnenia, ktoré sa v strune z daného miesta šíri napravo aj naľavo. Z významu vektorového súčinu vo vzťahu (14) je zrejmé, že sila $d\mathbf{F}$ je kolmá na element dĺžky $d\mathbf{l}$ aj na vektor magnetickej indukcie \mathbf{B} a za predpokladu, že vodič leží v rovine kolmej na vektor magnetickej indukcie a preteká ním striedavý harmonický prúd, pre jej veľkosť platí

$$dF = I_0 dl B \cos \omega t. \quad (15)$$

Zo vzťahu (15) vyplýva, že sila dF je harmonická a vlnenie, ktoré v strune vytvára, je tiež harmonické. Po odraze vlnenia na koncoch struny (v miestach britu 1 a britu 2) sa od týchto koncov šíria proti sebe dve vlny rovnakej frekvencie a amplitúdy, ktoré navzájom interferujú. Ak sú dosiahnuté také podmienky, že uzly stojateho vlnenia vytvoreného zložením týchto dvoch vln sa stotožnia s miestami upevnenia struny (s bodmi v mieste britu 1 a britu 2), dôjde k rezonancii a struna sa chveje na svojej rezonančnej frekvencii. Amplitúda v mieste kmitní bude výrazná a viditeľná voľným okom. Do rezonancie sa struna dostane vždy, keď sa na jej dĺžke vytvorí celočíselný násobok polovice vlnovej dĺžky stojateho vlnenia, teda keď je splnená podmienka daná vzťahom (8). Po dosadení vzťahu (10) do vzťahu (9) pre rezonančnú frekvenciu f_n chvenia dostaneme vzťah

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (16)$$

A. Odmerať základnú a vyššie rezonančné frekvencie pre rôzne hodnoty napínacej sily a porovnať ich s hodnotami vyplývajúcimi z teórie

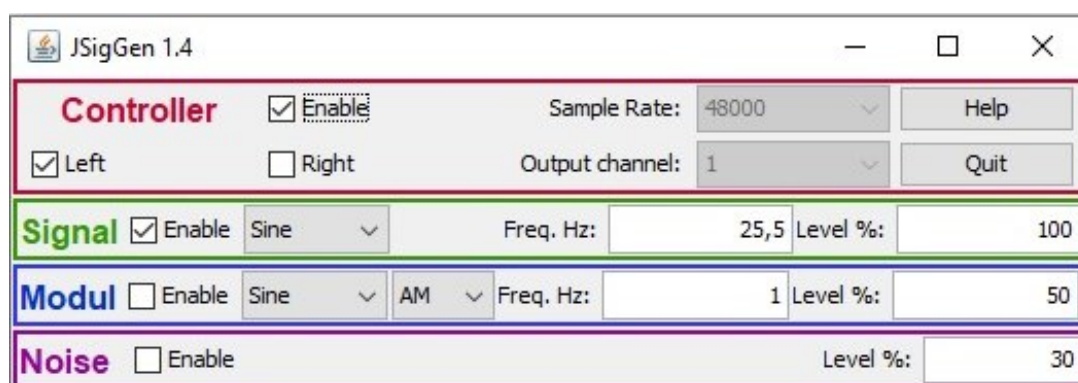
Pomôcky

Meracia aparatura pre meranie stojateho vlnenia na strune, počítač vo funkcii generátora striedavého prúdu, program JSigGenSK, mikrometrické meradlo, váhy, dĺžkové meradlo, závažia.

Postup merania

1. Meranie budeme realizovať pomocou zariadenia zobrazeného na obrázku (Obr. 2). Zmeriame dĺžku struny l (vzdialenosť medzi britmi 1 a 2) a určíme štandardnú neistotu merania dĺžky struny σ_l , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.
2. Zmeriame 10-krát priemer struny d , určíme aritmetický priemer priemeru \bar{d} a prislúchajúcu neistotu merania $\sigma_{\bar{d}}$. Hodnoty zapisujeme do tabuľky 1.
3. Misku meracej aparatúry zaťažíme závažím hmotnosti m_i , ktorého hmotnosť určíme vážením. Výsledná hmotnosť, ktorá napína strunu, je určená súčtom hmotnosti prázdnej misky m_0 a priloženého závažia m_i , t. j. $m = (m_0 + m_i)$.
4. Prelaďovaním generátora striedavého prúdu s premenlivým rozsahom frekvencií nájdeme rezonančné frekvencie pre dané zaťaženie, t. j. pre danú základnú veľkosť napínacej sily. Teda nájdeme základnú frekvenciu f_1 ($n = 1$) a vyššie harmonické frekvencie f_2, f_3, \dots, f_n ($n = 2, 3, \dots$). Pri meraní magnet umiestňujeme vždy do miesta predpokladanej kmitne. Ako pomôcku môžeme využiť obrázok (Obr. 1).

Pozn.: Na meranie používame program JSigGen, pomocou ktorého používame výstup zvukovej karty PC ako zdroj striedavého prúdu. Ovládanie programu JSigGenSk pre použitie na meranie frekvencie je veľmi jednoduché (Obr. 5.). Do okienka „Freq.Hz“ je možné zadať konkrétne číslo vyjadrujúce frekvenciu, alebo je možné umiestniť kurzor myši na požadované okienko a otáčaním kolieska na myši meniť číselnú hodnotu. JSigGen má prednastavené rôzne minimálne kroky ladenia frekvencie, my sme nastavili jeden krok na 0,1 Hz. Program JSigGen vytvára rôzne druhy časových závislostí prúdu (signálov) (sínus, trojuholník, štvorec, ...) v širokom rozsahu frekvencií, ktoré je možné podľa potreby meniť. Pre účely nášho merania budeme používať sínusový typ signálu.



Obr. 5. Pracovné prostredie programu JSigGenSK

5. Zväčšíme hmotnosť závažia, ktoré strunu napína a opäť hľadáme frekvencie. Postup teda opakujem pre 10 rôznych zaťažení struny, t. j. pre 10 rôznych veľkostí napínacej

sily, pričom zvyšujeme hmotnosť závaží na miske. Získané hodnoty hmotností a frekvencií zapisujeme do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

| | m_0 (kg) | | | l (m) | | | | | |
|-----|-------------------|-----------------------|--------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|
| i | d_i (m) | $(m_0 + m_i)$ (kg) | F_i (N) | f_1 (Hz) | f_{t1} (Hz) | f_2 (Hz) | f_{t2} (Hz) | f_3 (Hz) | f_{t3} (Hz) |
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | |
| n | | | | | | | | | |
| | $\bar{d} = \dots$ | | | | | | | | |

Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných hodnôt hmotností pre jednotlivé zaťaženia vypočítame použitím vzťahu $F = mg$ veľkosť sily, ktorou je napínaná struna.
2. Výpočtom z priemernej hodnoty priemeru \bar{d} struny a známej hustoty ρ materiálu struny (hodnotu nájdeme v tabuľkách) určíme lineárnu hustotu μ použitej struny.
3. Určíme výpočtom teoretické hodnoty rezonančných frekvencií f_t podľa vzťahu (16) pre všetkých 10 hodnôt napínacej sily F .
4. Experimentálne zistené hodnoty prvej harmonickej frekvencie a hodnoty pre vyššie harmonické frekvencie (f_1, f_2, \dots) porovnáme s teoretickými hodnotami rezonančných frekvencií (f_{t1}, f_{t2}, \dots). Porovnanie realizujeme v grafickej podobe zhotovením grafu závislosti $f = f(F)$.
5. Pomocou vzťahu (9) vypočítame rýchlosti (v_1, v_2, v_3) šírenia sa vlnenia v strune pre jednotlivé experimentálne namerané frekvencie.
6. Pre všetky hodnoty napínacej sily F vypočítame aritmetický priemer rýchlostí šírenia sa vlnenia odpovedajúce danej frekvencii $v_p = (v_1 + v_2 + v_3)/3$.
7. Použitím vzťahu (10) vypočítame teoretické hodnoty rýchlostí v_t odpovedajúce danej hodnote napínacej sily F . Získané vypočítané hodnoty zapisujeme do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

| i | F (N) | v_1 ($m \cdot s^{-1}$) | v_{t1} ($m \cdot s^{-1}$) | v_2 ($m \cdot s^{-1}$) | v_{t2} ($m \cdot s^{-1}$) | v_3 ($m \cdot s^{-1}$) | v_{t3} ($m \cdot s^{-1}$) | v_p ($m \cdot s^{-1}$) | v_t ($m \cdot s^{-1}$) |
|-----|------------|-------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | |
| n | | | | | | | | | |

8. Porovnáme súbory veličín získaných z experimentálneho merania, t. j. aritmetické priemery rýchlostí šírenia sa vlnenia v_p , so súbormi veličín očakávaných z teórie, t. j. s teoretickými hodnotami rýchlostí v_t . Porovnanie realizujeme v grafickej podobe zhotovením grafu závislosti $v = f(F)$.
9. V závere diskutujeme o tom, ako sa mení základná frekvencia so zmenou veľkosti napínacej sily, o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

KALORIMETRICKÉ MERANIA

Úlohy

- A. Určiť tepelnú kapacitu kalorimetra
- B. Vyšetriť hmotnostnú tepelnú kapacitu tuhej látky
- C. Experimentálne určiť hmotnostné skupenské teplo varu kvapaliny

Teoretický úvod

Vnútrotná energia telesa U je definovaná súčtom celkovej kinetickej energie neusporiadane pohybujúcich sa častíc telesa (molekúl, atómov, iónov) E_{k_i} a celkovej potenciálnej energie vzájomnej polohy týchto častíc E_{p_i} . Ak teleso pozostáva z N častíc, jeho vnútrotnú energiu vyjadríme vzťahom $U = \sum_{i=1}^N (E_{k_i} + E_{p_i})$. Zmena vnútornej energie ΔU môže nastať tepelnou výmenou alebo konaním práce. Teplo dodané telesu súvisí so zmenou vnútornej energie ΔU a objemovou prácou W vykonanou telesom podľa 1. termodynamického zákona $Q = \Delta U + W$. Teplo je tá časť energie, ktorá sa prenáša vzájomným pôsobením medzi atómami, molekulami. Dej, pri ktorom si neusporiadane sa pohybujúce častice telesa (sústavy) rôznej teploty odovzdávajú časť svojej energie, sa nazýva **tepelná výmena**.

Teplo Q je fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje mieru zmeny vnútornej energie telesa (sústavy). Teplo (tepelná energia) môže prechádzať z jedného telesa na druhé, alebo z jedného miesta prostredia na druhé, pričom sa pohyb tepla prejaví zmenou teploty. Ak teleso prijme teplo tepelnou výmenou, narastie jeho vnútrotná energia a zvýši sa teplota telesa. Jednotkou tepla je joule J ($J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$). Množstvo tepla potrebného na zvýšenie teploty látky závisí od hmotnosti látky, chemického zloženia a vnútornej štruktúry (stavby). Fyzikálna veličina, ktorá určuje množstvo tepla Q dodaného (odobratého) telesu, aby sa zvýšila (znížila) jeho teplota o jeden kelvin (respektíve o jeden stupeň Celzia), sa nazýva **tepelná kapacita** C a je definovaná vzťahom

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (1)$$

Jednotkou tepelnej kapacity je $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. **Hmotnostná tepelná kapacita** c vyjadruje množstvo tepla, ktoré je potrebné na ohriatie (ochladenie) jedného kilogramu látky o jeden kelvin (respektíve o jeden stupeň Celzia) a je definovaná vzťahom

$$c = \frac{dQ}{m dT} = \frac{C}{m}. \quad (2)$$

Q je teplo dodané (odovzdané telesu), m je hmotnosť telesa, C tepelná kapacita a dT je odpovedajúca zmena teploty. Jednotkou hmotnostnej tepelnej kapacity je $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Hmotnostná tepelná kapacita je charakteristická pre danú látku a pre rôzne látky a rôzne skupenstvá má rôzne hodnoty. Pri pevných a kvapalných látkach je funkciou teploty.

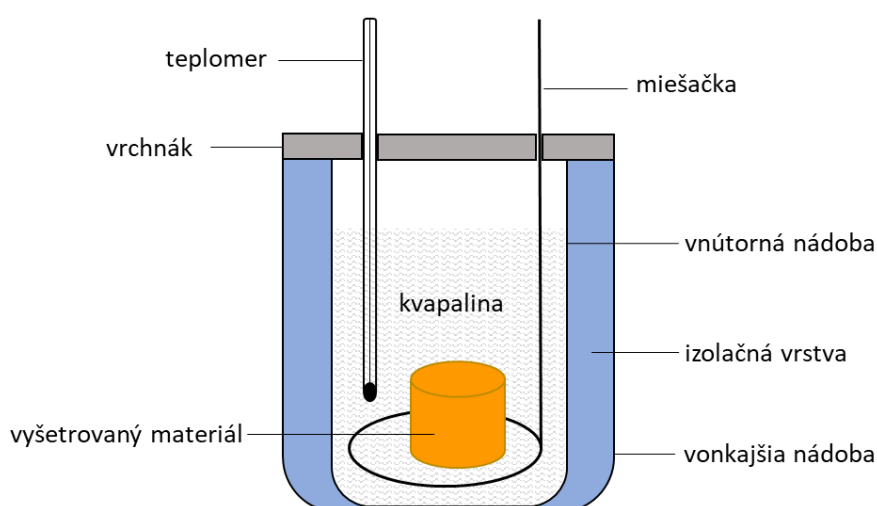
Pri plynoch závisí od teploty, tlaku a podmienok, pri ktorých plyn prijíma teplo. Podľa toho rozlišujeme hmotnostnú tepelnú kapacitu za stáleho tlaku c_p a hmotnostnú tepelnú kapacitu za stáleho objemu c_v . Ak je hmotnostná tepelná kapacita konštantná v danom intervale teplôt, môžeme písať pre množstvo dodaného alebo prijatého tepla Q vzťah

$$\Delta Q = mc\Delta T. \quad (3)$$

Kalorimetria je časť fyziky, ktorá sa zaoberá meraním tepla pri chemických reakciách alebo fyzikálnych zmenách látok uskutočňovaných v kalorimetri. Kalorimetrické merania sa realizujú v tepelne izolovanej sústave, pričom vnútorná energia takejto sústavy sa počas procesu nemení $\Delta U = 0$ J. Zmiešavací **kalorimeter** je tepelne izolovaná nádoba s miešačkou a teplomerom, v ktorej je možné uskutočňovať tepelnú výmenu medzi látkami pri súčasnom meraní zmeny teplôt (Obr. 1). Tepelné vlastnosti kalorimetra sa charakterizujú tepelnou kapacitou kalorimetra C_K . Ak tuhé telesá alebo kvapaliny skúmame v teplotnom intervale, v ktorom je hmotnostná tepelná kapacita c konštantná, **kalorimetrickú rovnicu** je možné vyjadriť všeobecne nasledovne

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^n (m_i c_i \Delta T_i), \quad (4)$$

kde ΔQ je množstvo dodaného alebo odovzdaného tepla telies, medzi ktorými dochádza k tepelnej výmene. Celková vnútorná energia v tepelne izolovanej sústave je konštantná a zo zákona zachovania energie vyplýva, že teplo, ktoré odovzdá jedno teleso (teplejšie) druhému, je rovnaké ako teplo, ktoré druhé teleso (chladnejšie) prijme od prvého.



Obr. 1. Prierez zmiešavacieho kalorimetra s ponoreným telesom v kvapaline

Látky sa môžu vyskytovať v pevnom, kvapalnom, plynnom skupenstve a v stave plazmy. Pevné látky, kvapaliny a plyny sa skladajú z veľkého počtu častíc. Sústava v rovnovážnom stave vo všetkých častiach s rovnakým fyzikálnym a chemickým zložením sa nazýva fáza (napr. ľad, voda, vodná para). **Fázová premena** (zmena skupenstva) je prechod látky z jednej fázy do druhej a medzi tieto zmeny patrí topenie, tuhnutie, vyparovanie, kondenzácia, sublimácia a desublimácia. Topenie je zmena tuhej látky na kvapalnú, opačný dej je tuhnutie, t. j. zmena kvapalnej látky na pevnú. Vyparovanie je zmena kvapalnej látky na plynnú. Kondenzácia je zmena plynnej látky na kvapalnú. Sublimácia je priama zmena tuhej látky na plynnú a opačný proces, desublimácia, prechod z plynnej na tuhú látku.

Skupenské teplo L je teplo, ktoré treba dodať alebo teplo, ktoré sa uvoľní pri premene látky danej hmotnosti zohriatej na teplotu skupenskej premeny z jedného skupenstva na druhé rovnakej teploty. **Hmotnostné skupenské teplo** l je množstvo skupenského tepla prepočítaného na hmotnosť látky m

$$l = \frac{L}{m}. \quad (5)$$

Jednotka hmotnostného skupenského tepla je $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$. Podľa druhu skupenskej premeny je definované skupenské teplo topenia (tuhnutia), vyparovania (kondenzácie) a sublimácie. Hmotnostné skupenské teplo topenia, tuhnutia, vyparovania a kondenzácie sú konštanty, ktorých hodnoty sa pre rôzne látky líšia. Skupenské teplo vyparovania pri teplote bodu varu je teplo, ktoré treba dodať kvapaline danej hmotnosti, zohriatej na teplotu varu, aby sa premenila na paru tej istej teploty. Para, ktorá je v rovnováhe so svojou kvapalinou, sa nazýva **nasýtená para** alebo sýta a jej tlak sa nazýva tlak nasýtenej pary. Skupenské teplo L vyparovania závisí od teploty, pri ktorej nastáva fázová zmena, a od tlaku. S rastúcou teplotou skupenské teplo vyparovania klesá. Ak uvažujeme skupenské teplo pri normálnom bode varu kvapaliny, hovoríme o skupenskom teple varu. Pri vyparovaní alebo vare odoberá látka potrebné skupenské teplo svojmu okoliu, pri kondenzácii ho, naopak, uvoľňuje a dáva telesám, ktoré sústavu obklopujú. Pri kondenzácii sa spätne uvoľňuje skupenské teplo kondenzačné rovnako veľké ako skupenské teplo vyparovania (pre tú istú teplotu). Skupenské teplá sa preto nazývajú latentnými, môžeme ich získať späť.

A. Určenie tepelnej kapacity kalorimetra

Zmiešavací kalorimeter sa skladá z nádoby tvaru valca naplnenej kvapalinou o známej hmotnostnej tepelnej kapacite c_1 , ktorá chemicky nereaguje s vyšetřovanou látkou (telesom), teplomera a miešačky. Táto nádoba je uložená do inej, väčšej nádoby. Vrstva vzduchu medzi nimi tvorí tepelnú izoláciu (Obr. 1). Zmiešavací kalorimeter je teda tepelne izolovaná nádoba, v ktorej skúmanej látke o hmotnosti m dodávame alebo odoberáme množstvo tepla dQ a meriame zmenu jej teploty dT . V zhode s definíciou, C_K je teplo, ktoré musíme dodať, aby

kalorimeter a jeho súčasti zvýšili svoju teplotu o jeden kelvin a určujeme ju experimentálne (pre každý kalorimeter zvlášť). Meranie je založené na platnosti zákona zachovania energie (kalorimetrickej rovnici). Predpokladom je, že látka, z ktorej je vyrobené teleso (môže byť aj kvapalné), chemicky nereaguje so známou kvapalinou v kalorimetri a pri tepelnej výmene medzi telesom a kvapalinou nenastáva zmena skupenstva. Tepelná výmena prebieha tak dlho, až nastane rovnovážny stav, pri ktorom sa teploty telesa a kvapaliny vyrovnajú na výslednú teplotu T . Pri určovaní C_K je výhodné, keď obe zmiešavané látky sú kvapalné a môžu, ale nemusia byť rovnaké, pričom majú odlišnú teplotu.

V tomto meraní budeme používať vodu rôznej teploty (T_1, T_2) na určenie tepelnej kapacity kalorimetra. Pri tepelnej výmene v kalorimetri teplejšia voda s teplotou T_2 , hmotnosťou m_2 odovzdá teplo $\Delta Q_2 = m_2 c_1 (T_2 - T)$, chladnejšia voda s teplotou T_1 , hmotnosťou m_1 prijme teplo $\Delta Q_1 = m_1 c_1 (T - T_1)$ a kalorimeter s príslušenstvom prijme teplo $\Delta Q_{C_K} = C_K (T - T_1)$, kde c_1 je hmotnostná tepelná kapacita vody (príloha, tabuľka 10 a 11, strana 161). Celková vnútorná energia v tepelne izolovanej sústave je konštantná a zo zákona zachovania energie vyplýva, že úbytok vnútornej energie telesa je rovnaký ako prírastok vnútornej energie kvapaliny, t. j. platí kalorimetrická rovnica

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_{C_K} = \Delta Q_2, \quad (6)$$

$$m_1 c_1 (T - T_1) + C_K (T - T_1) = m_2 c_1 (T_2 - T). \quad (7)$$

Odtiaľ matematickou úpravou dostaneme vzťah pre určenie tepelnej kapacity kalorimetra

$$C_K = m_2 c_1 \frac{(T_2 - T)}{(T - T_1)} - m_1 c_1. \quad (8)$$

Pomôcky

Zmiešavací kalorimeter s príslušenstvom, teplomer, digitálna váha, varič.

Postup merania

1. Určíme hmotnosť m_0 prázdneho a suchého kalorimetra s príslušenstvom. Vnútrnú nádobu kalorimetra s tepelnou kapacitou C_K naplníme približne do polovice vodou nižšej teploty a ponecháme ju v kalorimetri približne 10 minút, aby sa teplota všetkých častí kalorimetra ustálila na teplote T_1 . Druhýkrát odvážime kalorimeter s príslušenstvom a vodou nižšej teploty. Rozdiel hmotností vyjadruje hmotnosť vody m_1 s teplotou T_1 a hmotnostnou tepelnou kapacitou c_1 .
2. V stave rovnováhy odmeriame teplotu vody v kalorimetri T_1 . Na presnosť určenia C_K vplýva presnosť stanovenia teploty, a preto za účelom zníženia chyby teplotu stanovujeme tým istým teplomerom a pozorne sledujeme, kedy sa dosiahol stav rovnováhy.

3. V príslušnom zariadení zohrejeme iné množstvo vody na vyššiu teplotu T_2 .
4. Teplotu vody T_2 meriame tesne pred naliatím do kalorimetra.
5. Do vnútornej nádoby kalorimetra ku vode teploty T_1 dolejeme vodu vyššej teploty T_2 , hmotnosti m_2 a s hmotnostnou tepelnou kapacitou c_1 a obsah nádoby premiešame.
6. Po ustálení teploty kalorimetra s príslušenstvom a vodou tak, že ich teploty môžeme považovať za rovnaké, odmeriame výslednú teplotu T .
7. Určíme hmotnosť vody m_2 . Odvážime kalorimeter s príslušenstvom a so zmiešanými kvapalinami a následne hmotnosť m_2 určíme rozdielom tejto hmotnosti a hmotnosti kalorimetra so studenou vodou $m_0 + m_1$.
8. Určíme štandardné neistoty merania teploty σ_T a hmotnosti σ_m , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.

Vyhodnotenie merania

1. Vypočítame tepelnú kapacitu kalorimetra C_K podľa vzťahu (8).
2. Určíme neistotu merania nepriamo meranej veličiny C_K pomocou neistôt priamo meraných veličín m_1 , m_2 , T_1 , T_2 , T , pomocou štatistického súčtu parciálnych chýb podľa nasledujúceho vzťahu

$$\sigma_{C_K} = \sqrt{\left(\frac{\partial C_K}{\partial m_1}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial m_2}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial T_1}\right)^2 (\sigma_{T_1})^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial T_2}\right)^2 (\sigma_{T_2})^2 + \left(\frac{\partial C_K}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2},$$

kde pre jednotlivé derivácie platia vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_K}{\partial m_1} &= -c_1, & \frac{\partial C_K}{\partial m_2} &= c_1 \frac{(T_2 - T)}{(T - T_1)}, \\ \frac{\partial C_K}{\partial T_1} &= m_2 c_1 \frac{(T_2 - T)}{(T - T_1)^2}, & \frac{\partial C_K}{\partial T_2} &= \frac{m_2 c_1}{(T - T_1)}, & \frac{\partial C_K}{\partial T} &= \frac{m_2 c_1 (T_1 - T_2)}{(T - T_1)^2}. \end{aligned}$$

Ak meriame všetky hodnoty hmotností s rovnakou neurčitostou σ_m a hodnoty teploty s rovnakou neurčitostou σ_T , pre chybu nepriameho merania bude platiť výsledný vzťah

$$\sigma_{C_K} = \sqrt{c_1^2 \left(1 + \frac{(T_2 - T)^2}{(T - T_1)^2}\right) (\sigma_m)^2 + \frac{m_2^2 c_1^2}{(T - T_1)^2} \left(\frac{(T_2 - T)^2}{(T - T_1)^2} + 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{(T - T_1)^2}\right) (\sigma_T)^2}.$$

3. Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny C_K najväčšou mierou.
4. Výsledok merania uvedieme v tvare $C_K = (C_K \pm \sigma_{C_K})$ a výsledok využijeme pri ďalších kalorimetrických meraniach.
5. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

B. Určenie hmotnostnej tepelnej kapacity tuhých látok

Na určovanie hmotnostných tepelných kapacít látok sa najčastejšie používa kalorimetrická metóda s použitím zmiešavacieho kalorimetra (Obr. 1).

V ideálnom prípade sa všetko dodané teplo skúmanou látkou (teleso) odovzdá okolitému prostrediu (vode). V skutočnosti sa vždy časť dodaného tepla spotrebuje na ohriatie kalorimetra a jeho súčastí (nádoba, teplomer, miešačka) a časť tepla sa odvedie do prostredia, ktoré kalorimeter obklopuje. Túto skutočnosť vyjadrujeme tak, že do výpočtov zavádzame tepelnú kapacitu kalorimetra C_K . Teplo $\Delta Q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T)$, ktoré vyšetřovaná látka (teleso) odovzdá, sa rovná teplu $\Delta Q_1 = m_1 c_1 (T - T_1)$, ktoré prijme voda a teplu $\Delta Q_{C_K} = C_K (T - T_1)$, ktoré prijme kalorimeter s príslušenstvom. Pri tepelnej výmene platí kalorimetrická rovnica

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_{C_K} = \Delta Q_2, \quad (9)$$

$$m_1 c_1 (T - T_1) + C_K (T - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T). \quad (10)$$

Odtiaľ matematickou úpravou dostaneme vzťah pre určenie tepelnej kapacity skúmanej látky

$$c_2 = \frac{m_1 c_1 (T - T_1) + C_K (T - T_1)}{m_2 (T_2 - T)}. \quad (11)$$

Pomôcky

Zmiešavací kalorimeter, teplomer, digitálna váha, varič, nádoba na ohrev vody, tuhé telesá z rôznych materiálov.

Postup merania

1. Určíme hmotnosť prázdneho kalorimetra m_0 s príslušenstvom. Vnútorňú nádobu kalorimetra s tepelnou kapacitou C_K naplníme približne do polovice vodou nižšej teploty. Druhýkrát odvážeme kalorimeter s príslušenstvom a vodou nižšej teploty. Rozdiel hmotností vyjadruje hmotnosť vody m_1 s teplotou T_1 a hmotnostnou tepelnou kapacitou c_1 .
2. V stave rovnováhy odmeriame teplotu T_1 .
3. Určíme hmotnosť látky m_2 .
4. V príslušnom zariadení, nádobe zohrejeme telesá rôznych látok, napríklad ich zohrievame vo vode na vyššiu teplotu T_2 (do 100 °C).
5. Teplotu látky T_2 (vody v ktorej zohrievame teleso) meriame tesne pred vložením do kalorimetra.
6. Do vnútornej nádoby kalorimetra vložíme látku (teleso) teploty T_2 ($T_2 > T_1$), hmotnosti m_2 a s hmotnostnou tepelnou kapacitou c_2 , ktorú máme určiť.

- Po ustálení teploty kalorimetra s príslušenstvom a látky neznámej hmotnostnej tepelnej kapacity tak, že ich teploty môžeme považovať za rovnaké, odmeriame výslednú teplotu T .
- Určíme štandardné neistoty merania teploty σ_T a hmotnosti σ_m , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.
- Meranie opakujeme pre zvolené rôzne látky.

Vyhodnotenie merania

- Vypočítame hmotnostné tepelné kapacity vyšetřovaných telies c_2 podľa vzťahu (11).
- Určíme neistotu merania nepriamo meranej veličiny c_2 pomocou neistôt priamo meraných veličín $m_1, m_2, T_1, T_2, T, C_K$ podľa nasledujúceho vzťahu

$$\sigma_{c_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial c_2}{\partial m_1}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial m_2}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial T_1}\right)^2 (\sigma_{T_1})^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial T_2}\right)^2 (\sigma_{T_2})^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial C_K}\right)^2 (\sigma_{C_K})^2},$$

kde pre jednotlivé derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial c_2}{\partial m_1} = \frac{c_1 (T - T_1)}{m_2 (T_2 - T)}, \quad \frac{\partial c_2}{\partial m_2} = -\frac{(C_K + m_1 c_1) (T - T_1)}{m_2^2 (T_2 - T)}, \quad \frac{\partial c_2}{\partial T_1} = -\frac{(C_K + m_1 c_1)}{m_2 (T_2 - T)},$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial T_2} = -\frac{(C_K + m_1 c_1) (T - T_1)}{m_2 (T_2 - T)^2}, \quad \frac{\partial c_2}{\partial T} = \frac{(C_K + m_1 c_1)}{m_2 (T_2 - T)} + \frac{(C_K + m_1 c_1) (T - T_1)}{m_2 (T_2 - T)^2}, \quad \frac{\partial c_2}{\partial C_K} = \frac{(T - T_1)}{m_2 (T_2 - T)}.$$

Ak meriame všetky hodnoty hmotností s rovnakou neurčitostou σ_m , hodnoty teploty s rovnakou neurčitostou σ_t a neurčitost' určenia tepelnej kapacity kalorimetra σ_{C_K} sme určili v úlohe po A., tak pre chybu nepriameho merania bude platiť po matematickej úprave výsledný vzťah

$$\sigma_{c_2} = \sqrt{\frac{(T - T_1)^2}{(T_2 - T)^2 m_2^2} \left[c_1^2 + \frac{(C_K + m_1 c_1)^2}{m_2^2} \right] (\sigma_m)^2 + \frac{(T - T_1)^2}{(T_2 - T)^2 m_2^2} (\sigma_{C_K})^2 + \frac{2(C_K + m_1 c_1)^2}{(T_2 - T)^2 m_2^2} \left[1 + \frac{(T - T_1)}{(T_2 - T)} + \frac{(T - T_1)^2}{(T_2 - T)^2} \right] (\sigma_T)^2}.$$

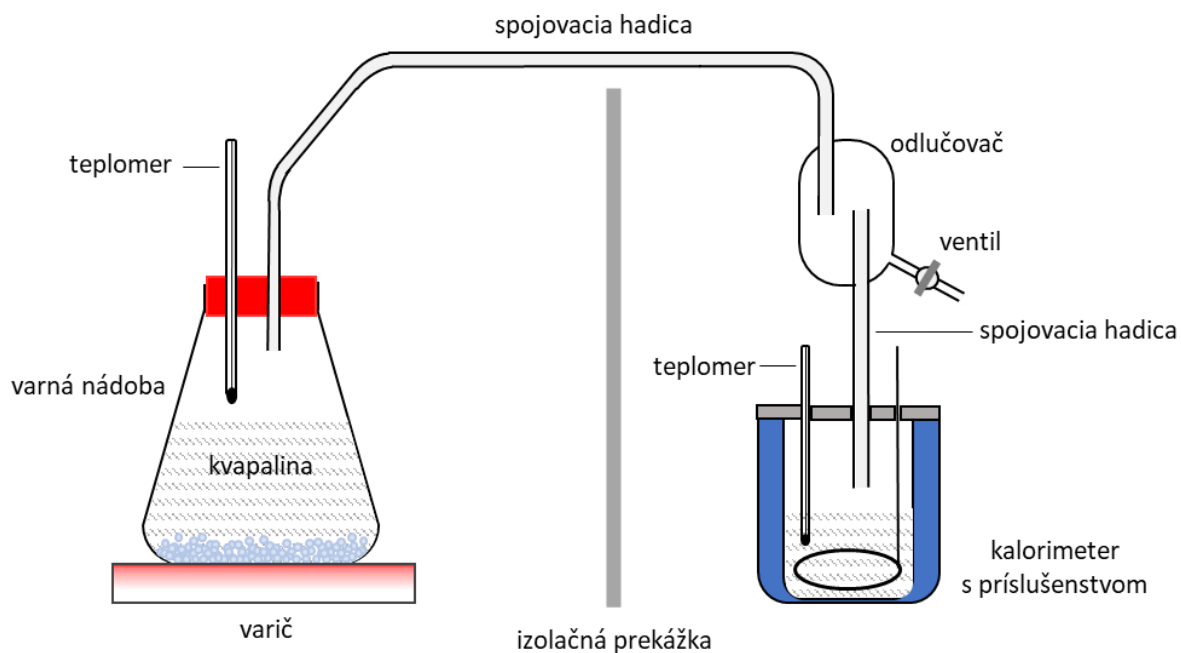
- Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny c_2 najväčšou mierou.
- Výsledok merania uvedieme v tvare $c_2 = (c_2 \pm \sigma_{c_2})$ pre všetky merané látky.
- Porovnáme výsledok merania hmotnostnej tepelnej kapacity c_2 s tabuľkovými hodnotami c_t (príloha, tabuľka 10, strana 161) definovanými pre nami zvolené látky použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|c_2 - c_t|}{c_t} 100 \%$$

- V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

C. Experimentálne určenie hmotnostného skupenského tepla varu kvapaliny

Hmotnostné skupenské teplo varu kvapaliny môžeme určiť použitím zmiešavacieho kalorimetra. Táto metóda merania je založená na tom, že teplo spotrebované pri zmene skupenstva sa pri opačnej skupenskej premene uvoľní. Nepriame meranie hmotnostného skupenského tepla realizujeme na zostave znázornenej na obrázku (Obr. 2).



Obr. 2. Zostava na meranie skupenského tepla varu pomocou zmiešavacieho kalorimetra

Kvapalinu, ktorej hmotnostné skupenské teplo varu l chceme zistiť, uvedieme do varu. Keďže potrebujeme poznať množstvo nasýtených pár, ktoré vzniknú pri dodávaní tepla, vytvorenú paru privádzame do zmiešavacieho kalorimetra, v ktorom sa nachádza chladnejšia kvapalina. Para pri styku s kvapalinou v kalorimetri bude kondenzovať a teplo uvoľnené pri kondenzácii sa odovzdá kvapaline a kalorimetru s príslušenstvom. Keď zistíme množstvo skondenzovanej pary, poznáme množstvo kvapaliny v kalorimetri, jej skupenské teplo a zmenu teploty, môžeme určiť hmotnostné skupenské teplo l .

Teplota, pri ktorej para skondenzuje, je rovná teplote varu T_v vyšetrovanej kvapaliny. Pri kondenzácii para hmotnosti m uvoľní teplo $Q_1 = ml$ a pri ochladení z teploty varu T_v na výslednú teplotu T kvapaliny v kalorimetri uvoľní teplo $Q_2 = mc(T_v - T)$, kde c je hmotnostná tepelná kapacita kvapaliny, ktorej l určujeme. Celkové uvoľnené teplo je $Q = Q_1 + Q_2$. Týmto teplom sa ohreje kvapalina v kalorimetri a kalorimeter s príslušenstvom. Ak je hmotnosť kvapaliny v kalorimetri m_1 , jej začiatková teplota T_1 , hmotnostná tepelná kapacita kvapaliny v kalorimetri c_1 a tepelná kapacita kalorimetra C_K ,

bude teplo prijaté kvapalinou v kalorimetri $Q_1' = m_1 c_1 (T - T_1)$ a teplo prijaté kalorimetrom s príslušenstvom $Q_2' = C_K (T - T_1)$. Pri tepelnej výmene platí kalorimetrická rovnica, t. j. zákon zachovania energie, vzťah (4), uvoľnené teplo sa rovná teplu prijatému a platí

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'. \quad (12)$$

Po dosadení dostávame kalorimetrickú rovnicu v tvare

$$ml + mc(T_v - T) = m_1 c_1 (T - T_1) + C_K (T - T_1) \quad (13)$$

a odkiaľ matematickou úpravou bude pre hmotnostné skupenské teplo platíť

$$l = \frac{(m_1 c_1 + C_K)(T - T_1)}{m} - c(T_v - T). \quad (14)$$

Najčastejšie volíme meranie tak, že vyšetrovaná kvapalina a kvapalina nachádzajúca sa v kalorimetri sú rovnaké, t. j. hmotnostná tepelná kapacita vyšetrovanej kvapaliny a kvapaliny v kalorimetri je rovnaká $c_1 = c$. V našom meraní budeme určovať hmotnostné skupenské teplo vyparovania vody pri danej teplote varu.

Pomôcky

Zmiešavací kalorimeter, teplomer, digitálna váha, varič, varná nádoba, odlučovač, izolačná prekážka.

Postup merania

1. Určíme tepelnú kapacitu kalorimetra C_K postupom popísaným v úlohe po A. Určenie tepelnej kapacity kalorimetra a k nemu prislúchajúcu neistotu merania σ_{C_K} .
2. Určíme hmotnosť prázdneho kalorimetra m_0 s príslušenstvom. Vnútorňú nádobu kalorimetra s tepelnou kapacitou C_K naplníme približne do polovice vodou. Druhýkrát odvážime kalorimeter s príslušenstvom a vodou. Rozdiel hmotností vyjadruje hmotnosť vody m_1 s teplotou T_1 a hmotnostnou tepelnou kapacitou c_1 .
3. V stave rovnováhy odmeriame teplotu T_1 vody v kalorimetri.
4. Vyšetrovanú kvapalinu (vodu) určitú dobu varíme v nádobe a získanú nasýtenú paru z nádoby vedieme cez odlučovač pary do zmiešavacieho kalorimetra, kde para prebubláva chladnou kvapalinou a kondenzuje.

Pozn.: Medzi kalorimeter a varič je vhodné umiestniť izolačnú prekážku, aby sme zabránili ohrievaniu kalorimetra vyžarovaným teplom z variča a nádoby. Po uvedení kvapaliny v nádobe do varu, necháme nejakú dobu ventil odlučovača otvorený. Až

keď je odlučovač dobre ohriaty, ventil uzatvoríme, a tým začne para prúdiť priamo do kvapaliny v kalorimetri.

5. Určíme teplotu varu kvapaliny T_v priamym odčítaním z teplomera nachádzajúceho sa v banke.
6. Necháme nejakú dobu paru kondenzovať. Potom prerušíme prívod pary.
7. Po ustálení teploty kalorimetra s príslušenstvom a vodou tak, že ich teploty môžeme považovať za rovnaké, odmeriame výslednú teplotu T odčítaním z teplomera nachádzajúceho sa v kalorimetri.
8. Určíme hmotnosť m skondenzovanej pary. Odvážime kalorimeter s príslušenstvom a so zmiešanými kvapalinami a následne hmotnosť m určíme rozdielom tejto hmotnosti a hmotnosti kalorimetra so studenou vodou $m_0 + m_1$.
9. Určíme štandardné neistoty merania teploty σ_T a hmotnosti σ_m , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika použitého meracieho zariadenia.

Vyhodnotenie merania

1. Vypočítame hmotnostné skupenské teplo varu kvapaliny l podľa vzťahu (14).
2. Pomocou metódy na určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny určíme neistotu l pomocou neistôt priamo meraných veličín m_1 , m , T_1 , T a nepriamo určenej tepelnej kapacity kalorimetra C_K podľa nasledujúceho vzťahu

$$\sigma_l = \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial m_1}\right)^2 (\sigma_{m_1})^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial T_1}\right)^2 (\sigma_{T_1})^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial T_v}\right)^2 (\sigma_{T_v})^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial C_K}\right)^2 (\sigma_{C_K})^2},$$

kde pre jednotlivé derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial l}{\partial m_1} = \frac{c_1(T-T_1)}{m}, \quad \frac{\partial l}{\partial m} = -\frac{(m_1c_1+C_K)(T-T_1)}{m^2}, \quad \frac{\partial l}{\partial T_1} = -\frac{(m_1c_1+C_K)}{m},$$

$$\frac{\partial l}{\partial T_v} = -c, \quad \frac{\partial l}{\partial T} = \frac{(m_1c_1+C_K)}{m} + c, \quad \frac{\partial l}{\partial C_K} = \frac{(T-T_1)}{m}.$$

Ak meriame všetky hodnoty hmotností s rovnakou neurčitostou σ_m , hodnoty teploty s rovnakou neurčitostou σ_t a neurčitosť určenia tepelnej kapacity kalorimetra σ_{C_K} sme určili v úlohe po A., tak pre chybu nepriameho merania bude platiť po matematickej úprave výsledný vzťah

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{(T-T_1)^2}{m^2} \left[c_1^2 + \frac{(C_K + m_1c_1)^2}{m^2} \right] (\sigma_m)^2 + \frac{(T-T_1)^2}{m^2} (\sigma_{C_K})^2 + 2 \left[\frac{(m_1c_1 + C_K)^2}{m^2} + \frac{(m_1c_1 + C_K)c}{m} + c^2 \right] (\sigma_T)^2}.$$

3. Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny l najväčšou mierou.
4. Výsledok merania uvedieme v tvare $l = (l \pm \sigma_l)$.
5. Porovnáme výsledok merania hmotnostného skupenského tepla l s tabuľkovou hodnotou l_t (príloha, tabuľka 15, strana 163) definovanou pre zvolené látky použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|l - l_t|}{l_t} 100 \%$$

6. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

MERANIE POISSONOVEJ KONŠTANTY

Úlohy

A. Určenie Poissonovej konštanty vzduchu Clémentovou-Desormesovou metódou

Teoretický úvod

Reálne plyny sú komplikované látky, ktoré sa skladajú z veľkého množstva molekúl, ktoré sa neustále pohybujú a pôsobia na seba medzimolekulovými silami. Plyny v rovnovážnom stave charakterizujeme fyzikálnymi veličinami, ktoré sa nazývajú stavové, lebo charakterizujú stav sústavy. Sú to termodynamická teplota T , tlak p , objem V , hmotnosť m , látkové množstvo n alebo počet molekúl N . Na základe empirických zákonov Gay-Lussaca, Boyla, Avogadra a Charlesona v roku 1834 francúzsky inžinier a fyzik Émile Clapeyron formuloval rovnicu, ktorá spája stavové veličiny plynu a často sa píše v tvare $pV = NkT$, kde k je Boltzmanova konštanta. Neskôr sa ukázalo, že táto rovnica nepopisuje správanie plynov pri vysokých tlakoch (rádovo väčších ako atmosférický) a nízkych teplotách (napr. -100 °C). Veľmi dobre však popisuje správanie plynov v okolí izbových teplôt a atmosférického tlaku, lebo za týchto podmienok je možné zanedbať určité vlastnosti plynu. Plyn, ktorý sa riadi Clapeyronovou rovnicou, nazývame ideálny a Clapeyronovu rovnicu stavovou rovnicou ideálneho plynu.

Ideálny plyn má nasledujúce vlastnosti. Rozmery molekúl ideálneho plynu sú zanedbateľne malé v porovnaní so vzdialenosťou medzi nimi. Molekuly na seba navzájom pôsobia iba počas zrážok, ktoré sú pružné, inak nie, t. j. neexistujú medzi nimi príťažlivé a odpudivé sily.

Plyn vyplňajúci istý definovaný objem priestoru tvorí plynné teleso. Pri zohrievaní alebo ochladzovaní telies sa mení ich teplota. Fyzikálna veličina, ktorá definuje množstvo tepla Q dodaného (odoberaného) sústave, aby sa zvýšila (znížila) jej teplota o jeden kelvin (respektíve o jeden stupeň Celzia), sa nazýva **tepelná kapacita** C a definujeme ju vzťahom

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (1)$$

Jednotkou tepelnej kapacity je $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. Množstvo tepla potrebné na zvýšenie (zníženie) teploty danej sústavy závisí aj od procesu, prostredníctvom ktorého teplo dodávame (odoberáme). Nakoľko sa pri zohrievaní plynu výrazne mení jeho tlak a objem, je od týchto stavových veličín závislá aj tepelná kapacita C a hmotnostná tepelná kapacita plynu c . Z toho dôvodu sú pri plynach dané dve tepelné kapacity a teda aj dve hmotnostné tepelné kapacity a to podľa toho, akým spôsobom zohrievanie plynu prebieha. Pri hľadaní vzťahov pre tepelné kapacity budeme vychádzať z prvého termodynamického zákona. **Prvý termodynamický zákon** (prvá veta termodynamická) vyjadruje zákon zachovania energie pre mechanické a tepelné deje, a hovorí: Zmena vnútornej energie sústavy dU je rovná súčtu práce dW vykonanej okolitými

telesami pôsobiacimi na sústavu silami a elementárneho množstva tepla dQ , ktoré je do sústavy dodané alebo zo sústavy odobraté, t. j.

$$dU = dQ + dW. \quad (2)$$

Alebo možno napísať, že $dQ = dU + dW'$, kde $dW' = p dV$ je elementárna práca, ktorú vykoná sústava $dW' = -dW$ a potom platí

$$dQ = dU + p dV. \quad (3)$$

Prvý termodynamický zákon v tejto podobe hovorí, že teplo dodané nejakej sústave sa spotrebuje na zvýšenie jej vnútornej energie a na prácu, ktorú táto sústava (napríklad plyn) vykoná. Zo vzťahu (2) vyplýva, že zmena vnútornej energie dU môže byť vyvolaná tepelnou výmenou, konaním práce alebo konaním práce a súčasne tepelnou výmenou. **Vnútoraná energia** sústavy U v rovnovážnom stave je vo všeobecnosti funkciou teploty T a objemu V , t. j. $U = U(T, V)$.

Ak bude dochádzať k zohrievaniu plynu pri konštantnom objeme (bude prebiehať tzv. izochorický dej), plyn nekoná žiadnu prácu ($dV = 0$) a celé dodané množstvo tepla sa mení na vnútornú energiu, t. j. zvyšuje sa kinetická energia molekúl plynu. Podelením elementárnych prírastkov tepla dQ a vnútornej energie dU zodpovedajúcim elementárnym prírastkom teploty dostaneme pre tepelnú kapacitu

$$c_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V. \quad (4)$$

Index „ V “ zdôrazňuje skutočnosť, že veličiny dQ , dU , dT meriame pri konštantnom objeme. Veličina c_V predstavuje tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme, výraz $(dQ/dT)_V$ predstavuje obyčajnú deriváciu Q podľa T , lebo teplo závisí iba od zmeny teploty. Výraz $(\partial U/\partial T)_V$ je parciálna derivácia U podľa T , a vnútornú energiu derivujeme parciálne podľa teploty preto, lebo vo všeobecnom prípade je funkciou aj objemu.

Ak bude dochádzať k zohrievaniu plynu pri konštantnom tlaku (izobarický dej), potom sa dodané teplo, t. j. tepelná energia, mení na vnútornú energiu plynu a tiež aj na prácu (plyn sa rozpína, čiže koná prácu voči vonkajším silám). Je zrejmé, že na dosiahnutie rovnakej hodnoty vnútornej energie plynu je v tomto prípade potrebné dodať väčšie množstvo tepla ako v prípade zohrievania plynu pri konštantnom objeme. Vzorec pre tepelnú kapacitu pri konštantnom tlaku c_p nájdeme tak, že za prírastok energie dU do rovnice (3) dosadíme vyjadrenie úplného diferenciálu energie

$$dU(T, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV. \quad (5)$$

Z prvej vety termodynamickkej pre vratné deje a sústavy nachádzajúce sa v rovnovážnom stave pre množstvo tepla prijaté sústavou potom platí

$$\begin{aligned} dQ = dU + pdV &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV. \end{aligned} \quad (6)$$

Podelením rovnice (6) prírastkom teploty dT za konštantného tlaku dostaneme

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \left(\frac{dV}{dT}\right)_p, \quad (7)$$

t. j.

$$c_p = c_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \left(\frac{dV}{dT}\right)_p. \quad (8)$$

Vzťah (8) potom vyjadruje tepelnú kapacitu za konštantného tlaku c_p , ktorá je väčšia ako tepelná kapacita za konštantného objemu c_V . Vidíme, že skutočne, ak prebieha zohrievanie plynu pri konštantnom tlaku, spotrebuje sa teplo dodané plynu zvonku na zvýšenie jeho vnútornej energie a na prácu, ktorú plyn pri rozpínaní vykoná. Hmotnostné tepelné kapacity c_p, c_V sa pri pevných a kvapalných látkach líšia veľmi málo, pri plynoch je tento rozdiel výrazný a nemožno ho zanedbať, pričom pri všetkých látkach je $c_p > c_V$.

Stavová rovnica pre ideálny plyn je daná vzťahmi

$$\begin{aligned} pV &= NkT, \\ pV &= nRT, \end{aligned} \quad (9)$$

kde N je počet častíc plynu nachádzajúcich sa v objeme V , n je látkové množstvo, k je Boltzmannova konštanta, R je molárna plynová konštanta. Dá sa ukázať, že vnútorná energia ideálneho plynu nezávisí od jeho objemu, t. j. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. V ďalšom odvodení budeme predpokladať, že ide o jeden mól ideálneho plynu ($n = 1$), t. j. rovnica (9) nadobudne tvar

$$pV = RT. \quad (10)$$

Po zdiferencovaní vzťahu (10) dostaneme rovnicu $p \left(\frac{dV}{dT}\right)_p = R$ a potom vzťah (8) môžeme napísať v tvare

$$c_p = c_V + R. \quad (11)$$

Toto je Mayerova rovnica, ktorá vyjadruje vzťah medzi molárnou tepelnou kapacitou pri konštantnom tlaku C_p a molárnou tepelnou kapacitou pri konštantnom objeme C_V . Keď sa namiesto molárnych tepelných kapacít vezmú tepelné kapacity, vzťah (11) bude mať nasledujúci tvar

$$C_p = C_V + nR. \quad (12)$$

Podiel tepelných kapacít nazývame **Poissonovou konštantou** κ a vzhľadom na vzťah medzi tepelnou kapacitou a hmotnostnou tepelnou kapacitou (je jedno či delíme molárne tepelné kapacity alebo tepelné kapacity) sú v tom istom pomere aj hmotnostné tepelné kapacity pri konštantnom tlaku c_p a konštantnom objeme c_V , takže platí

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V}. \quad (13)$$

Poissonova konštanta κ je teda bezrozmerná fyzikálna veličina. Pre všetky plyny je pomer tepelných kapacít $\kappa > 1$ a závisí od počtu atómov v molekule plynu (príloha, tabuľka 13, str. 162). Hodnotu Poissonovej konštanty κ pre ideálny plyn je možné vypočítať priamo z kinetickej teórie plynov nasledovne.

Uvažujme ideálny plyn, ktorý je zložený z molekúl jedného druhu, kde každá molekula má i stupňov voľnosti. Na pohyb jednej molekuly pripadá stredná energia $e = \frac{i}{2}kT$ a pre strednú energiu jedného mólu plynu platí $E = \frac{i}{2}N_AkT = \frac{i}{2}RT$, kde k je Boltzmannova konštanta, N_A je Avogadrova konštanta (vyjadruje počet molekúl v 1 móle), R je molárna plynová konštanta. Ak tento plyn zahrejeme pri konštantnom objeme (izochoricky), zvýšenie strednej energie E plynu bude viesť k nárastu vnútornej energie U . Vnútrná energia ideálneho plynu je iba funkciou teploty a pre zmenu vnútornej energie platí $dU = C_VdT$, kde C_V je tepelná kapacita pri konštantnom objeme, tak dostaneme

$$dE = \frac{i}{2}RdT = dU = C_VdT. \quad (14)$$

Z tejto rovnice dostávame pre molárnu tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme

$$C_V = \frac{i}{2}R. \quad (15)$$

Ak použijeme Mayerovu rovnicu, dostaneme

$$C_p = \frac{i}{2}R + R. \quad (16)$$

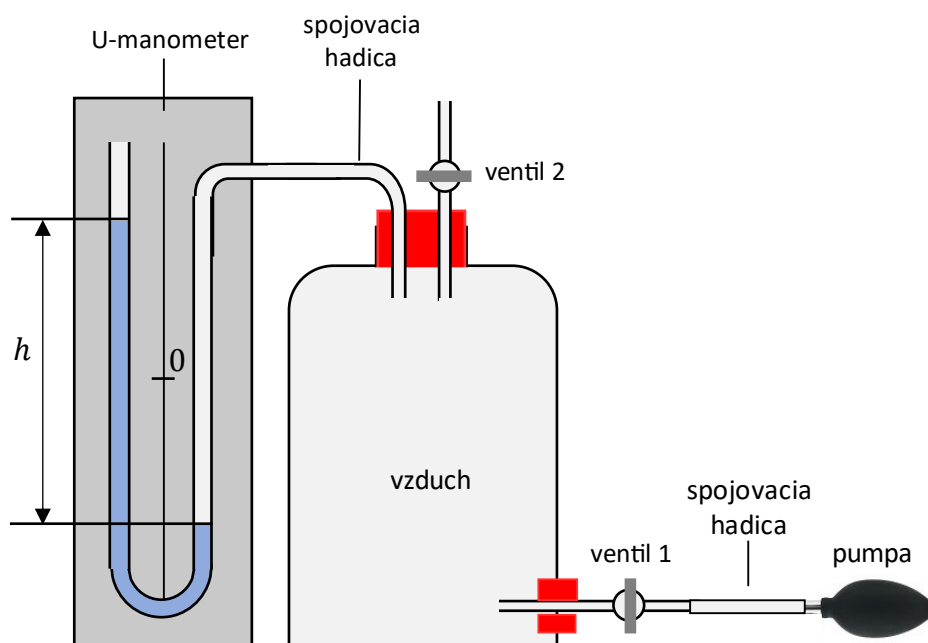
Poissonovu konštantu κ , vyjadrenú pomerom tepelných kapacít pri konštantnom tlaku a objeme (vzťah 13), môžeme dosadením vzťahov (15) a (16) za C_p , C_V vyjadriť v tvare

$$\kappa = \frac{\frac{i}{2}R + R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i + 2}{i}. \quad (17)$$

V prílohe (tabuľka 13, str. 162) sú uvedené teoretické hodnoty tepelných kapacít C_p , C_V a Poissonovej konštanty κ vypočítané podľa vzťahov (15) a (16) pre ideálny jednoatómový (zložený z jednoatómových molekúl), dvojatómový a viacatómový plyn. Pre reálny plyn neposkytuje kinetická teória dostatočne presné výsledky, preto sa konštanta určuje experimentálne. V našom prípade budeme určovať Poissonovu konštantu κ nepriamo Clémentovou-Desormesovou metódou.

A. Určenie Poissonovej konštanty vzduchu Clémentovou-Desormesovou metódou

Meranie realizujeme na Clémentovom-Desormesovom prístroji. Tento prístroj je veľmi jednoduchý a pozostáva zo sklenenej nádoby objemu V , ventilov (1) a (2), prívodov k pumpe, samotnej pumpy a U-manometra naplneného destilovanou vodou (Obr.1). Prostredníctvom ventilu (2) je možné nádobu prepojiť s vonkajším vzduchom, ktorého atmosférický tlak je p_0 . Pri tomto postupe určovania Poissonovej konštanty vzduchu budeme využívať zákonitosti izochorického a adiabatického deja v plynoch.



Obr. 1. Schéma aparatury na meranie Poissonovej konštanty Clémentovou-Desormesovou metódou

Adiabatický dej je dej, pri ktorom si sústava nevymieňa teplo s okolím. Z prvej termodynamickkej vety popísanej rovnicami (2) resp. (3) teda dostaneme, že vnútorná energia sústavy sa môže meniť iba na úkor práce konanej na sústave alebo sústavou

$$0 = dU + pdV. \quad (18)$$

Už vyššie sme uviedli, že pre zmenu vnútornej energie platí $dU = C_V dT$. Ak zdiferencujeme stavovú rovnicu (9), dostaneme

$$Vdp + pdV = RdT, \quad (19)$$

odkiaľ vyjadríme prácu $pdV = RdT - Vdp$. Zo stavovej rovnice (9) vyjadríme ďalej objem $V = RT/p$ a pomocou vzťahov (11) a (13) vyjadríme molovú plynovú konštantu $R = C_V(\kappa - 1)$. Dosadením vyjadrení pre prácu pdV , objem V a molovú plynovú konštantu R do rovnice (18) a následnou úpravou dostaneme túto rovnicu v tvare

$$\kappa \frac{dT}{T} - (\kappa - 1) \frac{dp}{p} = 0. \quad (20)$$

Jej integráciou získame Poissonovu rovnicu popisujúcu adiabatickú zmenu plynu

$$p^{-(\kappa-1)} T^\kappa = \text{konšt.} \quad (21)$$

Pre izochorickú zmenu plynu platí stavová rovnica

$$\frac{p}{T} = \text{konšt.} \quad (22)$$

Vzduch najskôr stlačíme v nádobe nahustením vzduchu pumpou cez ventil (1) pri zatvorenom ventile (2) tak, aby bol v nádobe pretlak voči tlaku okolitého vzduchu a necháme hladiny mernej kvapaliny v ramenách U-manometra ustáliť. Keďže zmenu tlaku vzduchu meriame pomocou U-manometra, môžeme ju vyjadriť pomocou vzťahu pre hydrostatický tlak $\Delta p_1 = \rho gh_1$. Tento stav plynu je charakterizovaný stavovými veličinami $p_1 = p_0 + \rho gh_1$, T_1 , n_1 , kde T_1 je teplota vzduchu, n_1 je látkové množstvo, t. j. počet mólov vzduchu v nádobe, p_0 je atmosférický tlak, ρ je hustota kvapaliny v U-manometri pri teplote T_1 , h_1 je rozdiel polôh hladín kvapaliny v ramenách U-manometra (stav I.).

Potom na krátky časový interval otvoríme ventil (2), kedy sa nádoba spojí s vonkajším vzduchom. Prebehne adiabatická expanzia vzduchu v nádobe z prvého do druhého stavu $(T_1, p_0 + \rho gh_1) \rightarrow (T_2, p_0)$. Predpokladáme, že expanzia prebehla tak rýchlo, že nedošlo k výmene tepla plynu s okolím, plyn sa expanziou ochladil na teplotu $T_2 < T_1$. Stav plynu

po adiabatickej expanzii je vyjadrený stavovými veličinami p_0, T_2, n_2 , kde n_2 je počet mólov, ktoré ostali po expanzii v sklenenej nádobe (stav II.)

Pri adiabatickej expanzii teplota vzduchu klesla, ale nádoba s plynom nie je tepelne izolovaná od okolia a po určitom čase sa teplota vzduchu v nádobe ustáli na vonkajšiu teplotu T_1 a tlak pritom rastie izochoricky na hodnotu p_2 , ktorý dosiahne pri teplote T_1 . Pretože je zmena teploty pri expanzii plynu veľmi malá, budú tlaky p_1, p_2 málo odlišné od atmosférického tlaku p_0 a teda aj množstvo plynu vyjadrené počtom mólov n_1 , resp. n_2 bude približne rovnaké. Prechod z druhého do tretieho stavu môžeme zapísať ako $(T_2, p_0) \rightarrow (T_1, p_0 + \rho gh_2)$. Po tomto ustálení hladín kvapaliny v ramenách U-manometra je tento stav charakterizovaný stavovými veličinami $p_2 = p_0 + \rho gh_2, V_2, T_1, n_2$, kde h_2 je rozdiel hladín kvapaliny v U-manometri (stav III.).

Pre prechod plynu z prvého do druhého stavu, t. j. pre adiabatickú expanziu vzduchu v nádobe platí

$$p_1^{-(\kappa-1)} T_1^\kappa = p_0^{-(\kappa-1)} T_2^\kappa. \quad (23)$$

Pre prechod plynu z druhého do tretieho stavu, t. j. izochorický ohrev plynu v nádobe, platí stavová rovnica

$$\frac{p_0}{T_2} = \frac{p_2}{T_1}. \quad (24)$$

Zo vzťahov (23) a (24) po matematickej úprave dostaneme

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-(\kappa-1)} = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^\kappa, \quad (25)$$

po dosadení za $p_1 = p_0 + \rho gh_1$ a $p_2 = p_0 + \rho gh_2$ dostaneme rovnicu

$$\left(\frac{p_0 + \rho gh_1}{p_0}\right)^{-(\kappa-1)} = \left(\frac{p_0}{p_0 + \rho gh_2}\right)^\kappa. \quad (26)$$

Po zlogaritmovaní môžeme písať vzťah pre výpočet Poissonovej konštanty κ v tvare

$$\kappa = \frac{\ln\left(1 + \frac{\rho gh_1}{p_0}\right)}{\ln\frac{1 + \frac{\rho gh_1}{p_0}}{1 + \frac{\rho gh_2}{p_0}}}. \quad (27)$$

Pretože pretlak dp_1 , resp. dp_2 je oveľa menší ako atmosférický tlak p_0 , platí $\frac{\rho gh_1}{p_0} \ll 1$, $\frac{\rho gh_2}{p_0} \ll 1$, môžeme vzťah (27) s použitím Taylorovho rozvoja funkcie $\ln(1+x)$ zjednodušiť a uvažovať iba prvý člen týchto radov a dostaneme pre κ vzťah

$$\kappa \approx \frac{\frac{\rho gh_1}{p_0}}{\frac{\rho gh_1}{p_0} - \frac{\rho gh_2}{p_0}}. \quad (28)$$

Po matematickej úprave dostávame približný vzťah pre výpočet κ

$$\kappa \approx \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (29)$$

Podľa vzťahu (29) na určenie hodnoty Poissonovej konštanty κ stačí iba odmerať rozdiel polôh hladín h_1 , h_2 tlakomernej kvapaliny v obidvoch stavoch plynu.

Pozn.: Clémentovou-Desormesovou metódou, ktorú sme popísali, môžeme dosiahnuť presnosť nie väčšiu ako 3 %. Krátkodobým otvorením uzatváracieho ventilu nezabezpečíme presne adiabatickú zmenu, nakoľko dôjde čiastočne k výmene tepla medzi vzduchom v nádobe a okolím nádoby. Týmto meraním dostaneme v priemere menšiu hodnotu Poissonovej konštanty κ ako je daná jej skutočná hodnota.

Pomôcky

Aparatúra na meranie Poissonovej konštanty Clémentovou-Desormesovou metódou alebo Clémentov-Desormesov prístroj, barometer, teplomer.

Postup merania

1. Z barometra odčítame atmosférický tlak pred začiatkom merania (p_{01}) a na konci merania (p_{02}), a vypočítame jeho priemernú hodnotu p_0 . Pretože ortuťový barometer má stupnicu v jednotkách torr (mmHg), na určenie atmosférického tlaku p_0 použijeme prevod $1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$, t. j. $p_0 \text{ (Pa)} = 133,3 \cdot p \text{ (torr)}$.
2. Odmeriame teplotu kvapaliny (destilovanej vody) v U-manometri bezprostredne pred meraním (t_1) a po meraní (t_2), a vypočítame jej priemernú hodnotu t .
3. Pri uzatvorení ventilu (2) do nádoby gumenou pumpou natlačíme cez ventil (1) vzduch tak, aby U-manometer ukazoval pretlak v nádobe a uzatvoríme ventil (1). Počkáme, pokým sa hladiny vodného stĺpca v ramenách U-manometra ustália a odčítame vzájomnú vzdialenosť vodných hladín obidvoch ramien U-manometra h_1 .
4. Otvoríme ventil (2) a hneď ho uzavrieme. Chvíľu opäť počkáme, pokým sa hladiny vodného stĺpca v ramenách U-manometra ustália a odčítame vzájomnú vzdialenosť vodných hladín obidvoch ramien U-manometra h_2 .

5. Meranie opakujeme 10 až 20-krát pri rôznych začiatočných pretlakoch vzduchu v nádobe a pri rôznych rýchlostiach otvorenia ventilu (2). Namerané hodnoty vzájomnej vzdialenosti vodných hladín obidvoch ramien U-manometra h_1 a h_2 zapisujeme do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

| p_{01} (Pa) | | | | | p_{02} (Pa) | | | | p_0 (Pa) | | |
|---------------|-----------|-----------|------------------------------|---------------------------------------|---------------|------------|------------|-------------------------------|--|--|--|
| t_1 (°C) | | | | | t_2 (°C) | | | | t (°C) | | |
| i | h_1 (m) | h_2 (m) | κ' | $\Delta_{\kappa'}^2$ | p_1 (Pa) | p_2 (Pa) | κ'' | $\Delta_{\kappa''}^2$ | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | |
| n | | | | | | | | | | | |
| | | | $\overline{\kappa'} = \dots$ | $\sigma_{\overline{\kappa'}} = \dots$ | | | | $\overline{\kappa''} = \dots$ | $\sigma_{\overline{\kappa''}} = \dots$ | | |

Vyhodnotenie merania

1. Určíme hodnotu hustoty destilovanej vody ρ použitej v U-manometri v závislosti od teploty (príloha, tabuľka 6, str. 158).
2. Vypočítame hodnotu tlaku vzduchu v nádobe po nahustení vzduchu $p_1 = p_0 + h_1 \rho g$ a po čiastočnom vypustení vzduchu z nádoby $p_2 = p_0 + h_2 \rho g$, kde za p_0 dosadíme priemerný atmosférický tlak.
3. Výpočtom podľa presného vzťahu (27) určíme Poissonovu konštantu, ktorej hodnoty v tabuľke 1 zapisujeme s označením κ'_i .
4. Výpočtom podľa približného vzťahu (29) určíme Poissonovu konštantu, ktorej hodnoty v tabuľke 1 zapisujeme s označením κ''_i .
5. Určíme aritmetický priemer Poissonovej konštanty $\overline{\kappa'}$, $\overline{\kappa''}$ a vypočítame príslušné stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\overline{\kappa'}}$, $\sigma_{\overline{\kappa''}}$.
6. Výsledok určenia Poissonovej konštanty vzduchu uvedieme v tvare $\kappa' = (\overline{\kappa'} \pm \sigma_{\overline{\kappa'}})$ a $\kappa'' = (\overline{\kappa''} \pm \sigma_{\overline{\kappa''}})$.
7. Vypočítame relatívnu odchýlku od tabuľkovej hodnoty. Porovnáme výsledky merania $\overline{\kappa'}$, $\overline{\kappa''}$ s tabuľkovou hodnotou Poissonovej konštanty κ pre vzduch (príloha, tabuľka 12, str. 162).
8. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch. Uvedieme možné zdroje chýb a metódy, pomocou ktorých by sa dali tieto chyby eliminovať.

PRÍLOHY

Tabuľka 1. Základné fyzikálne veličiny a ich jednotky medzinárodnej sústavy SI

| Fyzikálna veličina | | Základná jednotka | |
|------------------------|--------|-------------------|--------|
| Názov | Značka | Názov | Značka |
| čas | t | sekunda | s |
| dĺžka | l | meter | m |
| hmotnosť | m | kilogram | kg |
| elektrický prúd | I | ampér | A |
| termodynamická teplota | T | kelvin | K |
| látkové množstvo | n | mól | mol |
| svietivosť | I | kandela | cd |

Tabuľka 2. Odvodené jednotky SI so špeciálnymi názvami a symbolmi

| Fyzikálna veličina | Názov | Značka | Vzťah k iným jednotkám | Vzťah k základným jednotkám |
|--|-----------|----------|------------------------|---|
| rovinný uhol | radián | rad | | |
| priestorový uhol | steradián | sr | | |
| frekvencia | hertz | Hz | | s^{-1} |
| sila | newton | N | | $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ |
| tlak, napätie | pascal | Pa | $N \cdot m^{-2}$ | $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ |
| energia, práca, teplo | joule | J | $N \cdot m$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ |
| výkon | watt | W | $J \cdot s^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ |
| elektrický náboj | coulomb | C | $A \cdot s$ | $A \cdot s$ |
| elektrické napätie, elektrický potenciál | volt | V | $W \cdot A^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ |
| elektrický odpor | ohm | Ω | $V \cdot A^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ |
| elektrická kapacita | farad | F | $C \cdot V^{-1}$ | $kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$ |
| elektrická vodivosť | siemens | S | $A \cdot V^{-1}$ | $kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^{-2}$ |
| magnetický indukčný tok | weber | Wb | $V \cdot s$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ |
| magnetická indukcia | tesla | T | $Wb \cdot m^{-2}$ | $kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ |
| indukčnosť | henry | H | $Wb \cdot A^{-1}$ | $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ |
| rádioaktivita | becquerel | Bq | | s^{-1} |
| svetelný tok | lumen | lm | $cd \cdot sr$ | |
| osvetlenie | lux | lx | $lm \cdot m^{-2}$ | |
| dávka žiarenia | gray | Gy | $J \cdot kg^{-1}$ | $m^2 \cdot s^{-2}$ |
| dávkový ekvivalent | sievert | Sv | $J \cdot kg^{-1}$ | $m^2 \cdot s^{-2}$ |
| katalytická aktivita | katal | kat | | $mol \cdot s^{-1}$ |

Tabuľka 3. Násobky a diely jednotiek medzinárodnej sústavy SI

| Skratka | Názov | Hodnota | | Názov |
|---------|--------|------------|---|-----------------|
| Q | quetta | 10^{30} | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 | kvintilión |
| R | ronna | 10^{27} | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 | kvadriliarda |
| Y | yotta | 10^{24} | 1 000 000 000 000 000 000 000 000 | kvadrilión |
| Z | zetta | 10^{21} | 1 000 000 000 000 000 000 000 | triliarda |
| E | exa | 10^{18} | 1 000 000 000 000 000 000 | trilión |
| P | peta | 10^{15} | 1 000 000 000 000 000 | biliarda |
| T | tera | 10^{12} | 1 000 000 000 000 | bilión |
| G | giga | 10^9 | 1 000 000 000 | miliarda |
| M | mega | 10^6 | 1 000 000 | milión |
| k | kilo | 10^3 | 1 000 | tisíc |
| h | hekto | 10^2 | 100 | sto |
| da | deka | 10^1 | 10 | desať |
| - | - | 10^0 | 1 | jeden |
| d | deci | 10^{-1} | 0,1 | desatina |
| c | centi | 10^{-2} | 0,01 | stotina |
| m | mili | 10^{-3} | 0,001 | tisícina |
| μ | mikro | 10^{-6} | 0,000 001 | milióntina |
| n | nano | 10^{-9} | 0,000 000 001 | miliardtina |
| p | piko | 10^{-12} | 0,000 000 000 001 | bilióntina |
| f | femto | 10^{-15} | 0,000 000 000 000 001 | biliardtina |
| a | atto | 10^{-18} | 0,000 000 000 000 000 001 | trilióntina |
| z | zepto | 10^{-21} | 0,000 000 000 000 000 000 001 | triliardtina |
| y | yokto | 10^{-24} | 0,000 000 000 000 000 000 000 001 | kvadrilióntina |
| r | ronto | 10^{-27} | 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 | kvadriliardtina |
| q | quecto | 10^{-30} | 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 001 | kvintilióntina |

Tabuľka 4. Písmená a symboly gréckej abecedy

| Veľké písmená | Malé písmena | Názov |
|---------------|--------------|---------|
| A | α | alfa |
| B | β | beta |
| Γ | γ | gama |
| Δ | δ | delta |
| E | ε | epsilon |
| Z | ζ | zeta |
| H | η | éta |
| Θ | θ | théta |
| I | ι | iota |
| K | κ | kappa |
| Λ | λ | lambda |
| M | μ | mí |
| N | ν | ný |
| Ξ | ξ | ksí |
| O | ο | omicron |
| Π | π | pí |
| P | ρ | ró |
| Σ | σ | sigma |
| T | τ | tau |
| Υ | υ | ypsilon |
| Φ | φ | fí |
| X | χ | chí |
| Ψ | ψ | psí |
| Ω | ω | omega |

Tabuľka 5. Vybrané základné fyzikálne konštanty podľa SI

| Názov konštanty | Značka a hodnota konštanty |
|---|---|
| ťažové zrýchlenie (45° zemepisnej šírky) | $g = 9,806\ 65\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| rýchlosť svetla vo vákuu | $c = 299\ 792\ 458\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| elementárny náboj | $e = 1,602\ 177\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$ |
| permeabilita vákua | $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H} \cdot \text{m}^{-1} = 1,256\ 637 \cdot 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ |
| permitivita vákua | $\varepsilon_0 = 8,854\ 187 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| normálny tlak | $p_n = 101\ 325\ \text{Pa}$ |
| normálna teplota | $T_n = 273,15\ \text{K}$ |
| gravitačná konštanta | $\kappa = 6,672\ 59 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ |
| Boltzmannova konštanta | $k = 1,380\ 649 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| Avogadrova konštanta | $N_A = 6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ |
| molárna plynová konštanta | $R = 8,314\ 510\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ |
| molárny objem ideálneho plynu pri p_n a T_n | $V_n = 22,413\ 83 \cdot 10^3\ \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Faradayova konštanta | $F = 96\ 485,332\ 12\ \text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$ |
| Planckova konštanta | $h = 6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ |
| atómová hmotnostná konštanta | $m_u = 1,660\ 539\ 066 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$ |
| Stefan-Boltzmanova konštanta | $\sigma = 5,670\ 374\ 419 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ |
| 1 eV | $1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$ |

Tabuľka 6. Hustota destilovanej vody ρ v závislosti od teploty

| t (°C) | ρ (kg · m ⁻³) | | | | |
|--------|--------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| | desatiny stupňa | | | | |
| | ,0 | ,2 | ,4 | ,6 | ,8 |
| 10 | 999,700 | 999,682 | 999,664 | 999,645 | 999,625 |
| 11 | 999,605 | 999,585 | 999,564 | 999,542 | 999,520 |
| 12 | 999,498 | 999,475 | 999,451 | 999,427 | 999,402 |
| 13 | 999,377 | 999,352 | 999,326 | 999,299 | 999,272 |
| 14 | 999,244 | 999,216 | 999,188 | 999,159 | 999,129 |
| 15 | 999,099 | 999,069 | 999,038 | 999,007 | 999,975 |
| 16 | 998,943 | 998,910 | 998,877 | 998,843 | 998,809 |
| 17 | 998,774 | 998,739 | 998,704 | 998,668 | 998,632 |
| 18 | 998,695 | 998,558 | 998,520 | 998,482 | 999,444 |
| 19 | 998,405 | 998,365 | 998,325 | 998,285 | 998,244 |
| 20 | 998,203 | 998,162 | 998,120 | 998,078 | 998,035 |
| 21 | 997,992 | 997,948 | 997,904 | 997,860 | 997,815 |
| 22 | 997,770 | 997,724 | 997,678 | 997,632 | 997,585 |
| 23 | 997,538 | 997,490 | 997,442 | 997,394 | 997,345 |
| 24 | 997,296 | 997,246 | 997,196 | 997,146 | 997,095 |
| 25 | 997,044 | 997,992 | 997,941 | 997,888 | 997,836 |
| 26 | 996,783 | 996,729 | 996,676 | 996,621 | 996,567 |
| 27 | 996,512 | 996,457 | 996,401 | 996,345 | 996,289 |
| 28 | 996,232 | 996,175 | 996,118 | 996,060 | 996,002 |
| 29 | 995,944 | 995,885 | 995,826 | 995,766 | 995,706 |
| 30 | 995,646 | 995,586 | 995,525 | 995,464 | 995,402 |

Tabuľka 7. Hustota ρ vzduchu v závislosti od teploty t (pri tlaku 101,325 kPa)

| t (°C) | ρ (kg · m ⁻³) | t (°C) | ρ (kg · m ⁻³) |
|----------|--------------------------------|----------|--------------------------------|
| 0 | 1,293 | 16 | 1,221 |
| 1 | 1,288 | 17 | 1,217 |
| 2 | 1,284 | 18 | 1,213 |
| 3 | 1,279 | 19 | 1,209 |
| 4 | 1,275 | 20 | 1,205 |
| 5 | 1,270 | 21 | 1,201 |
| 6 | 1,265 | 22 | 1,197 |
| 7 | 1,261 | 23 | 1,193 |
| 8 | 1,256 | 24 | 1,189 |
| 9 | 1,252 | 25 | 1,185 |
| 10 | 1,247 | 26 | 1,181 |
| 11 | 1,243 | 27 | 1,177 |
| 12 | 1,239 | 28 | 1,173 |
| 13 | 1,234 | 29 | 1,169 |
| 14 | 1,230 | 30 | 1,165 |
| 15 | 1,226 | | |

Tabuľka 8. Hustota ρ vybraných tuhých látok pri teplote 20 °C, plynov pri teplote 0 °C a tlaku 101,325 kPa

| Látka | ρ (kg · m ⁻³) | Látka | ρ (kg · m ⁻³) |
|--------------------|--------------------------------|------------------|--------------------------------|
| hliník | 2 699 | kremeň | 2 651 |
| kremík | 2 328 | oceľoliatina | 7 800 |
| meď | 8 960 | sklo jenské | 2 230 |
| nikel | 8 900 | sklo prístrojové | 2 400 |
| olovo | 11 341 | sklo normálne | 2 580 |
| volfrám | 19 300 | olej minerálny | 900 – 930 |
| zinok | 7 140 | olej olivový | 910 |
| železo | 7874 | olej parafínový | 800 |
| mosadz | 8 300 – 8 600 | glycerín | 1 260 |
| oceľ chromoniklová | 7 800 – 8 100 | ortuť | 13 546 |

Tabuľka 9. Elastické vlastnosti rôznych tuhých látok

| Látka | Modul pružnosti v ťahu E ($\cdot 10^9$ Pa) | Modul pružnosti v šmyku G ($\cdot 10^9$ Pa) | Poissonovo číslo μ |
|------------------|--|---|------------------------|
| hliník | 71 | 26,4 | 0,34 |
| meď | 123 | 45,5 | 0,35 |
| nikel | 205 | 78 | 0,32 |
| olovo | 16 | 5,6 | 0,44 |
| volfrám | 390 | 151 | 0,29 |
| železo | 212 | 82 | 0,29 |
| mosadz | 99 | 36,5 | 0,36 |
| oceľ (do 5 % Ni) | 200 – 210 | 79 – 89 | 0,25 – 0,33 |
| plexisklo | 3,3 | 1,2 | 0,35 |
| kremeň | 73 | 31 | 0,17 |
| sklo kremenné | 75 | 32 | 0,17 |
| Drevo ihličnaté | 10 | 0,3 | |
| Drevo dubové | 12,5 | 0,6 | |

Tabuľka 10. Hmotnostná tepelná kapacita c_p niektorých tuhých látok, kvapalín a plynov pri 20 °C ($\kappa = c_p/c_v$)

| Látka | c_p (J · kg ⁻¹ · K ⁻¹) | Látka | c_p (J · kg ⁻¹ · K ⁻¹) |
|---------------------|---|-----------------|---|
| hliník | 896 | porcelán | 791 |
| vodná para (100 °C) | 1 952 | kremeň | 743 |
| meď | 383 | plasty | 1 300 – 1 800 |
| nikel | 448 | sklo | 840 |
| olovo | 129 | ortuť | 139 |
| volfrám | 134 | glycerín | 2 390 |
| zinok | 385 | olej olivový | 1 970 |
| železo | 450 | olej parafínový | 2 130 |
| mosadz | 384 | voda (4 °C) | 4 186 |
| oceľ | 460 | vzduch | 1 012 |

Tabuľka 11. Hmotnostná tepelná kapacita c_p vody v závislosti od teploty t (pri tlaku 101,325 kPa)

| t (°C) | c_p (J · kg ⁻¹ · K ⁻¹) | t (°C) | c_p (J · kg ⁻¹ · K ⁻¹) |
|-----------|---|------------|---|
| 0 | 4 217,8 | 55 | 4 182,2 |
| 5 | 4 201,3 | 60 | 4 184,3 |
| 10 | 4 192,2 | 65 | 4 186,7 |
| 15 | 4 186,3 | 70 | 4 189,7 |
| 20 | 4 181,8 | 75 | 4 192,9 |
| 25 | 4 179,5 | 80 | 4 196,4 |
| 30 | 4 178,4 | 85 | 4 200,5 |
| 35 | 4 178,1 | 90 | 4 205,2 |
| 40 | 4 178,4 | 95 | 4 210,4 |
| 45 | 4 179,3 | 100 | 4 216,0 |
| 50 | 4 180,5 | | |

Tabuľka 12. Hmotnostná tepelná kapacita vzduchu c_p a Poissonova konštanta vzduchu $\kappa = c_p/c_V$ v závislosti od teploty (pri tlaku 101,325 kPa)

| t (°C) | c_p ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) | κ |
|----------|---|----------|
| -50 | 1 006 | 1,41 |
| 0 | 1 006 | 1,40 |
| 20 | 1 006 | 1,40 |
| 40 | 1 008 | 1,40 |
| 60 | 1 009 | 1,40 |
| 80 | 1 011 | 1,40 |
| 100 | 1 012 | 1,395 |

Tabuľka 13. Molárna tepelná kapacita C_p , C_V a Poissonova konštanta κ ideálneho plynu

| Ideálny plyn s molekulami | C_p ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) | C_V ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) | κ |
|---------------------------|--|--|------------------------|
| 1 atómovými | $\frac{5}{2}R = 20,786$ | $\frac{3}{2}R = 12,472$ | $\frac{5}{3} = 1,6667$ |
| 2 atómovými | $\frac{7}{2}R = 29,100$ | $\frac{5}{2}R = 20,786$ | $\frac{7}{5} = 1,4$ |
| 3 a viac atómovými | $4R = 33,358$ | $3R = 24,943$ | $\frac{4}{3} = 1,3333$ |

Tabuľka 14. Moment zotrvačnosti I pre os idúcu stredom mnohouholníka a kolmú na rovinu, kde M je hmotnosť a R je polomer opísanej kružnice mnohouholníka

| N-uholník | I ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) |
|-----------|--------------------------------------|
| 3 | $\frac{1}{4}MR^2$ |
| 4 | $\frac{1}{3}MR^2$ |
| 6 | $\frac{5}{12}MR^2$ |

Tabuľka 15. Teploty t_v normálneho bodu varu a hmotnostné skupenské teplo varu l_v ,
teploty t_t , merné skupenské teplo varu l_v a merné skupenské teplo topenia l_t
pre vybrané materiály

| Látka | t_v (°C) | t_t (°C) | l_v ($\cdot 10^3$ J \cdot kg $^{-1}$) | l_t ($\cdot 10^3$ J \cdot kg $^{-1}$) |
|--------------|------------|------------|---|---|
| hélium | -268,9 | -272 | 20,6 | 5,2 |
| vodík | -252,7 | -259 | 454 | 58,2 |
| kyslík | -183,0 | -218 | 213 | 13,8 |
| ethylalkohol | 78,4 | -115 | 840 | 108 |
| voda | 100 | 0 | 2 255,5 | 333,7 |
| ortuť | 356,6 | -38,9 | 292 | 11,8 |
| železo | 3 023 | 1 540 | 6 340 | 289 |

ZOZNAM POUŽITEJ A ODPORÚČANEJ LITERATÚRY

- BURY, P. – PUDIŠ, D. – MARTINČEK, I. – TRPIŠOVÁ B. – JUREČKA S. – KÚDELČÍK J.: *Fyzika I*, 1. vyd. Žilina, EDIS, 2013, 286 s.
- FEYNMAN, R. P. – LEIGHTON, R. B. – SANDS, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*, 1. vyd. Fragment, 2000, 732 s.
- GIBOVÁ, Z.: *Fyzikálne meranie*, 1. vyd. Košice, Technická univerzita v Košiciach, 2019, 155 s.
- HAJKO, V. – SZABÓ, J. D.: *Základy fyziky*, 1. vyd. Bratislava, VEDA 1980, 576 s.
- HALLIDAY, D. – RESNICK, R. – WALKER, J.: *Fyzika*, VUTIUM, 2007.
- HORÁK, Z. – KRUPKA, F.: *Fyzika, Průručka pro vysoké školy technického směru, Svazek 1*, Praha, ALFA, 1976, 424 s.
- HORÁK, Z. – KRUPKA, F. – ŠINDELÁŘ, V.: *Technická fyzika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1960, 1436 s.
- CHORVÁTOVÁ, Z.: *Kmity a vlny*, 1. vyd. Bratislava, Univerzita Komenského v Bratislave, 1994, 147 s.
- JACKULIAK, Q. – ŽUCHA, V. – TARJÁNYIOVÁ, G. – HOCKICKO, P.: *Zbierka úloh z fyziky II*, 1. vyd. Žilina, EDIS 2006, 261 s.
- KÚDELČÍK, J. – HOCKICKO, P.: *Základy fyziky*, 1. vyd. Žilina, EDIS 2011, 272 s.
- KVASNICA, J.: *Matematický aparát fyziky*, 2. vyd. Praha, Academia Praha, 1997, 384 s.
- MECHOVÁ, E, - KOŠŤÁL, K. a kol.: *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz fyziky*, Praha, Prometheus, 2001, 588 s.
- MORIN, D.: *Introduction to classical mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008, 739 s.
- NĚMEČEK, P.: *Neistoty měření*, 1. vyd. Praha, Česká společnost pro jakost, 2008, 98 s.
- NIAN-SHENG, Ch.: *Formula for the Viscosity of a Glycerol-Water Mixture*, Ind. Eng. Chem. Res. 2008, 47, 3285-3288.
- NORDLING, C. – OSTERMAN, J.: *Physics Handbook for Science and Engineering*, sixth edition, Lund, 1980, 452 s.
- TARJÁNYIOVÁ, G. – HOCKICKO, P.: *Úvod do fyziky*, 1. vyd. Žilina, Žilinská univerzita v Žiline, 2020, 106 s.

TARJÁNYIOVÁ, G. – MIZERA, T.: *Home experiment as one of the possibilities of laboratory exercises during online education*, In ELEKTRO 2022 conference proceedings, Danvers: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2022, str. 1-4.

VAJDA, D. – ŠTELINA, J. – MUSIL, C. – BELLAN, I. – JAMNICKÝ, I.: *Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky*, 2. vyd. Žilina, Žilinská univerzita 2003, 196 s.

ZRUBÁKOVÁ, N. – BREŽNÁ, E. – PISOŇOVÁ, B.: *Praktikum z mechaniky a molekulyvej fyziky*, 1. vyd. UK Bratislava, 1994, 168 s.

<https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9.pdf/fcf090b2-04e6-88cc-1149-c3e029ad8232> (cit. 2023-08-03)

<https://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html> (cit. 2023-08-03)

<http://tarjanyiova.fyzika.uniza.sk/lab.html> (cit. 2023-8-10)

<https://fyzika.uniza.sk/laboratorne-cvicenia/> (cit. 2023-8-10)

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023
ako svoju 4933. publikáciu

Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk