ÚVOD DO FYZIKY

RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD.

doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline

EDIS-vydavateľské centrum ŽU 2020

Vydanie a tlač týchto skrípt bolo finančne podporené projektom KEGA č. 029ŽU-4/2018: Tvorba inovatívnych učebných materiálov z oblasti aplikovanej fyziky a experimentálnych meraní pre technické predmety novoakreditovaných študijných programov.

Recenzenti: doc. PaedDr. Ľuboš Krišťák, PhD.
doc. PaedDr. Miriam Spodniaková Pfefferová, PhD.

Schválila edičná rada ŽU výmerom č. 20/S/2020

ISBN 978-80-554-1741-7

Obsah

Úvod

K tomu aby ste si dobre osvojili učivo z fyziky, nestačí naučiť sa len množstvo definícií, zákonov a vzťahov. Na zvládnutie fyzikálneho učiva je nutné tiež definíciám, zákonom, vzťahom porozumieť, vedieť ich vysvetliť a vedieť ich použiť pri riešení praktických problémov. Súčasťou štúdia fyziky nie je len pozorne sledovať výklad učiteľa, ale pravidelne sa pripravovať podľa doporučenej literatúry a riešiť fyzikálne úlohy.

Tieto skriptá sú zostavené tak, aby boli pre vás študentov nápomocné tak pri štúdiu základných definícií, zákonov a vzťahov ako aj precvičovaní si fyzikálnych tém prostredníctvom fyzikálnych úloh. Skôr ako začnete s riešením fyzikálnych úloh je veľmi dôležité si prečítať kapitolu Riešenie fyzikálnych úloh, kde sa oboznámite so základnými postupmi, ktoré je vhodné používať pri riešení.

V každej kapitole nájdete základné fyzikálne pojmy, vzťahy medzi fyzikálnymi veličinami, fyzikálne zákony, princípy a definície, ktoré slúžia na orientáciu v danej problematike, téme. Na zjednodušenie štúdia, pochopenia je výklad doplnený konkrétnymi príkladmi a obrázkami. Na konci kapitol sú úlohy s výsledkami slúžiace na precvičenie si konkrétnych fyzikálnych tém. V skriptách sa používajú zákonné jednotky SI.

V skriptách sa stretávame s pojmom fyzikálnej veličiny, fyzikálnej jednotky a so základnými algebraickými operáciami s fyzikálnymi veličinami. Ďalej sa v nich venujeme témam z kinematiky a dynamiky hmotného bodu, silám trenia, gravitačnému poľu, mechanike kvapalín a plynov, termike, termodynamike a základným veličinám, vzťahom a zákonom charakterizujúcim elektrické pole a elektrický prúd.

Obsah a význam fyziky

Fyzika bola pôvodne vedou o prírode, teda zahŕňala všetky prírodné vedy, ktoré sa z nej v priebehu storočí postupne oddeľovali. V dnešnej dobe nie je možné jednoznačne stanoviť hranice medzi fyzikou a ostatnými vedami. Stručne možno povedať, že fyzika skúma najvšeobecnejšie vlastnosti a prejavy hmoty. Vychádza z pozorovania a pokusov, študuje všeobecné vlastnosti látok a polí, indukciou dospieva k všeobecným kvantitatívnym zákonom a uvádza ich do logickej súvislosti tak, aby z nej deduktívne vyplývali pozorované javy. Jediným overením správnosti každej fyzikálnej (vedeckej) „poučky“ je súhlas so skutočnosťou, ktorý zisťujeme na základe vlastnej skúsenosti (pozorovaním alebo pokusom). Hlavným zdrojom fyzikálneho poznania je teda pozorovanie a to jednak prírodných dejov alebo dejov pripravených umelo, čiže pokusov.

Jedným z cieľov fyziky je naučiť človeka myslieť tak, aby dokázal určovať priebeh budúcich (prípadne i minulých) dejov a zasahovať do týchto dejov tak, ako si to napríklad vyžadujú potreby praxe.

Fyziku je možné v súčasnej dobe deliť (z dôvodu „systematizácie“) podľa niekoľkých kritérií. Podľa metódy skúmania na **teoretickú fyzika,** ktorá formuluje všeobecné zákony a princípy a vytvára predstavy, z ktorých deduktívnym spôsobom logicky a matematicky vyvodzuje známe i nové poznatky. **Experimentálna fyzika** vychádza z pokusov, z ktorých indukciou dochádza k všeobecným empirickým zákonom a vzťahom a overuje predpoklady a predstavy teoretickej fyziky. **Praktická fyzika** zaoberá sa praktickým i teoretickým štúdiom meracích metód, ktoré zdokonaľuje a spresňuje. Podľa účelu, ktorý svojím skúmaním sleduje môžeme deliť na **čistú fyziku**, ktorá prevádza základný výskum v rôznych fyzikálnych oboroch, **aplikovanú fyziku** ako je napr. geofyzika, astrofyzika, lekárska fyzika, **technickú fyziku**, atď. Fyziku možno deliť na mechaniku (kinematiku, dynamiku), termiku, termodynamiku, hydromechaniku, elektrinu a magnetizmus, atómovú fyziku, jadrovú fyziku, fyziku elementárnych častíc, atď.

Postup riešenia fyzikálnych úloh

Úspešnosť riešenia fyzikálnych úloh závisí od:

a) znalosti učiva v rozsahu jednotlivých preberaných tém,
b) zvládnutia potrebných matematických znalostí ako je úprava algebraických výrazov, dosadzovanie číselných hodnôt a jednotiek fyzikálnych veličín do odvodených vzťahov, operácie s číselnými výrazmi, používanie vhodných technických prostriedkov ako je kalkulačka, počítač, čítanie a zostrojovanie grafov,
c) na osvojení si určitých stratégií riešenia fyzikálnych úloh s používaním vhodných pracovných postupov.

Stratégia riešenia fyzikálnych úloh zahŕňa pri väčšine úloh spolu osem základných krokov:

1. porozumenie obsahu úlohy
2. zápis úlohy
3. fyzikálny rozbor situácie
4. všeobecné riešenie úlohy
5. určenie jednotky výsledku
6. riešenie pre zadané hodnoty
7. diskusia výsledku
8. formulácia odpovede

Osvojenie si takejto stratégie vám veľmi uľahčí prácu a ľahšie prekonáte ťažkosti, ktoré možno pri riešení fyzikálnych úloh máte. Na nasledujúcich riadkoch si podrobnejšie rozoberieme jednotlivé kroky pri riešení konkrétnej fyzikálnej úlohe.

1. **Porozumenie obsahu úlohy.** Text úlohy si pozorne prečítame, aby sme správne pochopili, čo je definované a čo sa v úlohe od nás vyžaduje.
2. **Zápis úlohy.** Na zápis fyzikálnych veličín, s ktorými budeme pri riešení úlohy pracovať používame dohodnuté symboly, napr. v tejto úlohe si označíme veličinu rýchlosť písmenom v, čas písmenom t,..., ak ich použijeme viackrát, tak ich označíme indexom napr. $v_1,\ v_2$,... Taktiež zapíšeme hodnoty zadaných fyzikálnych veličín s ich jednotkami a premeníme si ich, ak je to potrebné na základné jednotky sústavy SI. Každú veličinu, ktorá je neznáma, si označíme otáznikom.
3. **Fyzikálny rozbor situácie.** Prvým krokom je nákres situácie, do ktorého si môžeme zapísať symboly fyzikálnych veličín, ktoré sú súčasťou riešenia úlohy. Náčrt, schéma je veľmi dôležitou súčasťou riešenia, pretože pomáha pochopiť podstatu riešenej úlohy a uľahčuje orientáciu v úlohe.
4. **Všeobecné riešenie úlohy.** Zo vzťahov, ku ktorým sme dospeli pri rozbore, vyjadríme hľadanú veličinu pomocou veličín, ktoré sú zadané. Rovnicu zapíšeme tak, že na ľavej

strane bude symbol, ktorý označuje hľadanú veličinu a na pravej strane symboly označujúce zadané veličiny. Táto rovnica sa nazýva všeobecné riešenie.

5. **Určenie jednotky výsledku.** Pred riešením pre dané hodnoty si stanovíme jednotku hľadanej veličiny a to nasledovne. Do všeobecného riešenia dosadíme za symboly daných veličín ich jednotky a s nimi potom pracujeme ako s algebraickými výrazmi, t. j. násobíme ich alebo delíme. Takto vyjadríme jednotku hľadanej fyzikálnej veličiny.
6. **Riešenie pre dané hodnoty.** Do všeobecného riešenia dosadíme číselné hodnoty daných veličín, a potom vypočítame hodnotu hľadanej veličiny.
7. **Diskusia riešenia.** Skúmame, či číselná hodnota vypočítanej veličiny zodpovedá približne skutočnosti.
8. **Formulácia odpovede.** V závere riešenia formulujeme odpoveď na otázku, ktorá bola formulovaná v zadaní fyzikálnej úlohy. Ak je úloha číselne zadaná, obsahuje odpoveď číselnú hodnotu hľadanej veličiny, ak je úloha zadaná všeobecne, tak uvádzame len všeobecné riešenie.

Pri riešení úloh budete postupne získavať skúsenosti a určité zručnosti, uvidíte, že jednotlivé kroky stratégie riešenia úloh nie je možné od seba striktne oddeliť, a že sa navzájom prelínajú a ovplyvňujú. Voľba metódy a spôsobu riešenia každej konkrétnej úlohy je možná len po detailnom rozbore úlohy. Napr. je potrebné začať analýzou síl, ktoré pôsobia na každé teleso, čo vám pomôže riešiť či skúmať každé teleso zvlášť, alebo celú sústavu a aké zákony zachovania je možné použiť. V niektorých prípadoch je možné použitie dvoch metód riešenia fyzikálnych problémov použitím Newtonových zákonov alebo zákonov zachovania. V niektorých prípadoch, keď nepoznáme charakteristiku síl vzájomného pôsobenia, možno použiť iba zákony zachovania. Rýchlosti telies je potrebné udávať vzhľadom na tú istú inerciálnu sústavu, to platí taktiež pre potenciálnu energiu (t. j. vhodná voľba $E_p = 0\ \mathrm{J}$).

1. Fyzikálne veličiny a jednotky

Fyzikálne veličiny popisujú vlastnosti telies, stavy alebo zmeny, ktoré je možné zmerať. Fyzikálne veličiny majú kvalitatívnu stránku, vyjadrujú vlastnosť spoločnú rôznym fyzikálnym objektom a kvantitatívnu stránku, ktorá vyjadruje stupeň, veľkosť tejto vlastnosti. Hovoríme, že veličiny majú určitú hodnotu.
Hodnotu fyzikálnej veličiny vyjadrujeme jej číselnou hodnotou $\{X\}$ (číslo - **koľko?**) a meracou jednotkou (**čoho?**) $[X]$, zapisujeme

$$X = \{X\}[X]$$

slovne čo = koľko.čoho (napríklad dĺžka = 20 metrov).

Podľa toho akú jednotku zvolíme, dostaneme rôzne číselné hodnoty fyzikálnych veličín, napríklad:

dĺžka	$l = 52\ \mathrm{mm}$	$\{l\} = 52$	$[l] = \mathrm{mm}$
	$l = 5{,}2\ \mathrm{cm}$	$\{l\} = 5{,}2$	$[l] = \mathrm{cm}$
hmotnosť	$m = 6{,}2\ \mathrm{kg}$	$\{m\} = 6{,}2$	$[m] = \mathrm{kg}$
	$m = 6\ 200\ \mathrm{g}$	$\{m\} = 6\ 200$	$[m] = \mathrm{g}$

Každá fyzikálna veličina a jednotka je zaradená do systému fyzikálnych veličín a jednotiek. **Fyzikálna jednotka** je dohodnutá, na základ zvolená veličina toho istého druhu, s ktorou meranú veličinu pri meraní porovnávame.

Je stanovených sedem základných veličín a odpovedajúcich **základných jednotiek** (Tabuľka 1.), ktoré sú základom **Medzinárodnej sústavy jednotiek** SI, čo je skratka **Systéme International d´Unités**. Generálna konferencia pre váhy a miery (CGPM) schválila vo Versailles 16. Novembra 2018 zmenu základných definícií jednotiek sústavy SI (redefiníciе). Zmena vstúpila do platnosti na Svetový deň metrológie 20. mája 2019. Podstatou redefinície je, že základné jednotky sú teraz viazané na sedem vybraných fyzikálnych konštánt, ktorých hodnoty sú dohodou fixované (považujú sa za pevne stanovené). Nové definíce vychádzajú z predpokladu, že všetky základné jednotky sú vyjadrené s použitím tzv. „tvaru s explicitnou konštantou“, v ktorom je základná jednotka definovaná nepriamo, stanovením presnej hodnoty všeobecne uznávaných fundamentálnych fyzikálnych konštánt daných štruktúrou hmoty v celom vesmíre.

Bol vybraný súbor siedmich definujúcich konštánt s presne definovanými hodnotami:

frekvencia žiarenia, ktoré vzniká pri prechode atómu cézia ^{133}Cs medzi dvoma hladinami veľmi jemnej štruktúry základného stavu

$$\Delta v_{Cs} = 9\ 192\ 631\ 770\ \mathrm{Hz}$$

rýchlosť svetla vo vákuu $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Planckova konstanta $h = 6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$

elementárny náboj $e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$

Boltzmannova konštanta $k = 1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$

Avogadrova konštanta $N_A = 6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

svetelná účinnosť monochromatického žiarenia frekvencie $540\ \mathrm{THz}$

$$K_{cd} = 683\ \mathrm{lm.W^{-1}}$$

Prehľad základných jednotiek a ich nové definície sa uvádzajú v takom poradí, aby každá základná jednotka závisela iba na definícii základnej jednotky uvedenej vyššie v poradí.

Sekunda, symbol s, je SI-jednotka času. Je definovaná fixovaním číselnej hodnoty celziovej frekvencie Δv_{Cs}, prechodovej frekvencie atómu cézia 133 v pokojovom stave pri prechode medzi dvoma hladinami veľmi jemnej štruktúry základného stavu, ktorá sa rovná $9\ 192\ 631\ 770$, ak je vyjadrená v jednotke Hz, ktorá sa rovná $\mathrm{s^{-1}}$.

Meter, symbol m, je SI-jednotka dĺžky. Je definovaná fixovaním číselnej hodnoty rýchlosti svetla vo vákuu c, ktorá sa rovná $299\ 792\ 458$, ak je vyjadrená v jednotkách $\mathrm{m.s^{-1}}$, kde sekunda je definovaná v zmysle Δv_{Cs}.

Kilogram, symbol kg, je SI-jednotka hmotnosti. Je definovaný fixovaním číselnej hodnoty Planckovej konštanty h, ktorá je rovná $h = 6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$, ak je vyjadrená v jednotkách $\mathrm{J.s}$, čo sa rovná $\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$, kde meter a sekunda sú definované v zmysle c a Δv_{Cs}.

Ampér, symbol A, je SI-jednotka elektrického prúdu. Je definovaná fixovaním číselnej hodnoty elementárneho náboja, ktorý je rovný $e = 1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}$, ak je vyjadrená v jednotke C, čo sa rovná $\mathrm{A.s}$, kde sekunda je definovaná v zmysle Δv_{Cs}.

Kelvin, symbol K, je SI-jednotka termodynamickej teploty. Je definovaná fixovaním číselnej hodnoty Boltzmannovej konštanty k, ktorá je rovná $1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}$, ak je vyjadrená v jednotkách $\mathrm{J.K^{-1}}$, čo sa rovná $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}K^{-1}}$, kde kilogram, meter a sekunda sú definované v zmysle h, c a Δv_{Cs}.

Mol, symbol mol, je SI-jednotka látkového množstva. Jeden mól obsahuje presne $6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}$ elementárnych entít. Toto číslo je fixovaná číselná hodnota Avogadrovej konštanty, N_A, ak je vyjadrená v jednotke $\mathrm{mol^{-1}}$ a má názov Avogadrove číslo. Látkové množstvo, symbol n, systému je mierou počtu špecifikovaných elementárnych entít. Elementárnou entitou môže byť atóm, molekula, ión, elektrón alebo akákoľvek iná častica alebo špecifikovaná skupina častíc.

Kandela, symbol cd, je SI-jednotka svietivosti v danom smere. Je definovaná fixovaním číselnej hodnoty svetelnej účinnosti monochromatického žiarenia s frekvenciou $540 \cdot 10^{12}\mathrm{Hz}$, K_{cd}, ktorá sa rovná 683, ak je vyjadrená v jednotkách $\mathrm{lm.W^{-1}}$, čo sa rovná $\mathrm{cd.sr.W^{-1}}$, alebo $\mathrm{cd.sr.kg^{-1}.m^{-1}.s^3}$, kde kilogram, meter a sekunda sú definované v zmysle h, c a Δv_{Cs}.

Tabuľka 1. - Základné veličiny a ich jednotky SI

Fyzikálna veličina		Základná jednotka SI	
Názov	Značka	Názov	Značka
čas	t	sekunda	s
dĺžka	l	meter	m
hmotnosť	m	kilogram	kg
elektrický prúd	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množstvo	n	mól	mol
svietivosť	I	kandela	cd

Odvodené jednotky SI je možné definovať nie len ako doteraz, t. j. pomocou základných jednotiek, ale aj priamo, pomocou uvedených definičných konštánt. Niektoré odvodené jednotky sú uvedené v Tabuľke 2. Medzi odvodené jednotky patrí napríklad jednotka sily **newton**, ktorá sa označuje N, a je možné ju pomocou základných jednotiek hmotnosti, dĺžky a času vyjadriť

$$1\, newton = 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m.}s^{-2}$$

Tabuľka 2. - Odvodené a doplnkové jednotky SI

Fyzikálna veličina	Odvodená jednotka		
Názov	Názov	Značka	
rovinný uhol	radián	rad	
priestorový uhol	steradián	sr	
frekvencia	hertz	Hz	s^{-1}
sila	newton	N	$kg.m.s^{-2}$
tlak	pascal	Pa	$N.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}$
energia, práca, teplo	joule	J	$N.m = kg.m^{2}.s^{-2}$
výkon	watt	W	$J.s^{-1} = kg.m^{2}.s^{-3}$
elektrický náboj	coulomb	C	A.s
elektrické napätie	volt	V	$W.A^{-1} = kg.m^{2}.s^{-3}.A^{-1}$
elektrická kapacita	farad	F	$C.W^{-1} = kg^{-1}.m^{-2}.s^{4}.A^{2}$
elektrický odpor	ohm	Ω	$V.A^{-1} = kg.m^{2}.s^{-3}.A^{-2}$
elektrická vodivosť	siemens	S	$A.V^{-1} = kg^{-1}.m^{-2}.s^{3}.A^{2}$
magnetický indukčný tok	weber	Wb	$V.s = kg.m^{2}.s^{-2}.A^{-1}$
indukčnosť	henry	H	$Wb.A^{-1} = kg.m^{2}.s^{-2}.A^{-2}$
magnetická indukcia	tesla	T	$Wb.m^{-2} = kg.s^{-2}.A^{-1}$
svetelný tok	lumen	lm	cd.sr
osvetlenie	lux	lx	$lm.m^{-2}$

Na jednoduchý a stručný zápis veľmi veľkých alebo veľmi malých hodnôt fyzikálnych veličín sa používa exponenciálny tvar zápisu čísel pomocou čísla 10. Napríklad

$$4\,355\,000\,000\ \mathrm{J} = 4{,}355 \cdot 10^{9}\ \mathrm{J}$$

alebo

$$0{,}000\,55\ s = 5{,}5 \cdot 10^{-4}\ s$$

V kalkulačkách a na počítačoch sa používa zápis $4{,}355\ E9\ \mathrm{J}$ alebo $5{,}5\ E - 4\ s$, kde písmeno E je vo význame exponentu základu 10. Veľmi veľké alebo veľmi malé hodnoty fyzikálnych veličín je možné vyjadriť aj použitím predpôn v názvoch jednotiek (Tabuľka 4.), pričom každá predpona charakterizuje konkrétnu mocninu čísla 10. Predpona pri jednotke SI, znamená, že hodnotu veličiny je potrebné vynásobiť zodpovedajúcim koeficientom. Napríklad čas alebo výkon je možné zapísať

$$1{,}85 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} = 1{,}85\ mikrosekundy = 1{,}85\ \mu s$$

$$6{,}85 \cdot 10^{6}\ \mathrm{W} = 6{,}85\ megawattov = 6{,}85\ \mathrm{MW}$$

Pravidelne sa používajú niektoré jednotky s predponami ako napríklad dekagram, deciliter, centimeter, megabajt, atď. Je tu však jedna výnimka, kilogram je jednotka základná, nie násobok.

Tabuľka 3. - Násobky a diely jednotiek SI

Predpona	Značka	Násobok	Násobok	Názov
yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	kvadrilión
dzéta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	triliarda
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	trilión
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000	biliarda
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000	bilión
giga	G	10^{9}	1 000 000 000	miliarda
mega	M	10^{6}	1 000 000	milión
kilo	k	10^{3}	1 000	tisíc
hekto	h	10^{2}	100	sto
deka	da	10^{1}	10	desať
základná jednotka		10^{0}	1	jeden
deci	d	10^{-1}	0,1	desatina
centi	c	10^{-2}	0,01	stotina
mili	m	10^{-3}	0,001	tisícina
mikro	μ	10^{-6}	0,000 001	milióntina
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001	miliardtina
piko	p	10^{-12}	0,000 000 000 001	bilióntina
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001	biliardtina
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	trilióntina
zepto	z	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001	triliardtina
yokto	y	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001	kvadrilióntina

Pre všeobecnú rozšírenosť a užitočnosť sa okrem jednotiek SI používajú aj ďalšie jednotky mimo sústavy SI, ale ich používanie je akceptované. Jednotky mimo sústavy SI uznané ako používateľné spolu s SI sa nazývajú **vedľajšie jednotky** (Tabuľka 4.). Napríklad základnou jednotkou času v SI je sekunda, akceptované sú aj minúta (min), hodina (h), deň (d).

Tabuľka 4. - Vedľajšie jednotky SI

Veličina	Názov jednotky	Značka	Vzťah k základnej jednotke
čas	minúta hodina ddeň	min h d	1 min = 60 s 1 h = 3600 s 1 d = 86 400 s
rovinný uhol	stupeň minuta sekunda	° ' "	1° = (π/180) rad 1' = (π/10 800) rad 1"= (π/64 8 000) rad
dĺžka	astronomická jednotka parsek svetelný rok	AU pc l.y.	1 AU = $1{,}49598 \cdot 10^{11}$ m 1 pc = $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ m 1 l.y. = $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ m
plošný obsah	hektár ár	ha a	1 ha = 10^4 m^2 1 a = 10^2 m^2
objem	liter	l	1 l = 10^{-3} m^3
hmotnosť	tona atomová hmotnostná jednotka	t u	1 t = 10^3 kg 1 u $\approx 1{,}660\ 57 \cdot 10^{-27}$ kg
optická mohutnosť	dioptria	D	1 D = m^{-1}
energia	elektónvolt	eV	1 eV $\approx 1{,}602\ 19 \cdot 10^{-19}$ J

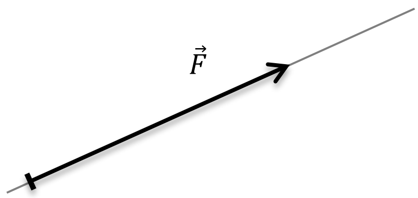
2. Skalárne a vektorové fyzikálne veličiny

V rámci matematického aparátu sa fyzikálne veličiny zadeľujú do troch skupín: skalárne, vektorové a tenzorové veličiny.

Skalárne fyzikálne veličiny (**skaláry**) sú jednoznačne určené číselnou hodnotou a jednotkou, v ktorej sa meria daná fyzikálna veličina (napr. hmotnosť, objem, čas, práca, výkon, energia, tlak...).

Vektorové fyzikálne veličiny (**vektory**) sú charakterizované číselnou hodnotou a jednotkou (čo určuje veľkosť vektora), smerom a pôsobiskom vektora. Vektor možno označovať $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$,... v tlačenej literatúre (hrubo zvýraznené písmeno fyzikálnej veličiny) alebo $\vec{F}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$,... v písomnom prejave (vektory označujeme šípkou nad písmenom fyzikálnej veličiny).

Absolútna hodnota vektora $|\boldsymbol{F}| = |\vec{F}| = F$ označuje **veľkosť vektora** (v tomto prípade je to veľkosť sily). Napríklad $|\boldsymbol{F}| = 7\ \mathrm{N}$ čítame „veľkosť vektora ef sa rovná 7 newtonov“. Vektor graficky znázorňujeme orientovanou úsečkou, priamka preložená jej koncovými bodmi sa nazýva vektorová priamka, ktorá určuje orientáciu vektora (obr. 2.1). Dĺžka orientovanej úsečky vyjadruje dĺžku vektora.



Obr. 2.1. Grafické znázornenie vektora

Pri narábaní so skalármi a vektormi treba mať na pamäti, že fyzikálne veličiny majú aj svoj „fyzikálny rozmer“ vyjadrený jednotkou danej veličiny. Vo fyzike nie je možné sčitovať vektor a skalár (napr. rýchlosť a hmotnosť), nie je možné sčitovať ani rôzne skalárne fyzikálne veličiny (napr. hmotnosť a teplotu) a vektorové fyzikálne veličiny (napr. silu a rýchlosť) s rôznymi jednotkami. Pri vektorových fyzikálnych veličinách je potrebné rozlišovať veličinu a veľkosť veličiny. Napríklad tvrdenie, že „rýchlosť auta je 80 km.h^{-1}“ je z fyzikálneho hľadiska nesprávne, správne je „veľkosť rýchlosti auta je 80 km.h^{-1}“, pretože rýchlosť je vektorová fyzikálna veličina a číselnú hodnotu má len veľkosť, smer nemá číselnú hodnotu.

2.1. Operácie s vektormi

Rovnosť vektorov

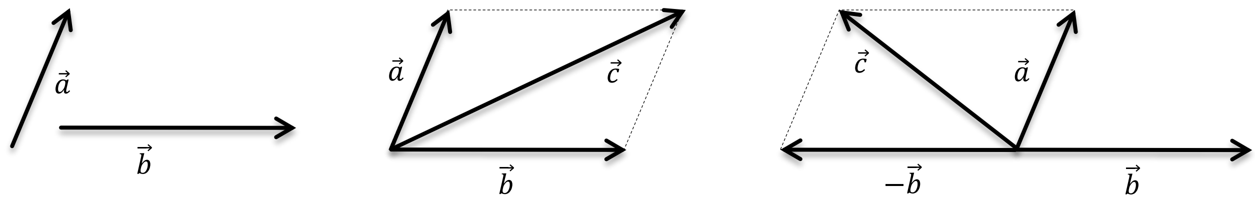
Vektory $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ rovnakého druhu (napr. dve sily $\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2$) sú rovnaké, ak majú rovnakú veľkosť a smer, inak sú rôzne. Nie je možné porovnávať vektory rôzneho druhu (napr. zrýchlenie a silu). Vektor $-\boldsymbol{a}$ má rovnakú veľkosť, ale opačný smer a nazýva sa **opačný vektor** k vektoru $\boldsymbol{a}$, pričom platí $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$.

Súčin vektora a skaláru

Výsledkom súčinu vektora $\boldsymbol{a}$ a skaláru k je vektor $\boldsymbol{b}$, pre ktorý platí: $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$. Ak $k > 0$, majú vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnaký smer, vektory sú súhlasne rovnobežné ($\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$), ak $k < 0$, vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ majú opačné smery, sú nesúhlasne rovnobežné ($\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$), ak $k = 0$, potom je $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, vektor $\boldsymbol{0}$ nazývame **nulový vektor**. Nulový vektor nemá smer, graficky ho nemožno zakresliť.

Súčet a rozdiel vektorov

Výsledkom súčtu vektoru $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sa nazývajú zložky vektora a vektor $\boldsymbol{c}$ sa nazýva výslednica vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Pre súčet dvoch vektorov platí komutatívny zákon: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. Rozdielom dvoch vektorov $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.



Obr. 2.2. Grafické znázornenie súčtu a rozdielu vektorov

Výsledný vektor možno určiť graficky, a to dvomi spôsobmi. Do začiatku vektora $\boldsymbol{a}$ premiestnime vektor $\boldsymbol{b}$ a daný útvar doplníme na rovnobežník, tak jeho uhlopriečka so začiatkom vo vektore $\boldsymbol{a}$ určuje vektor $\boldsymbol{c}$ (obr. 2.2). Alebo do koncového bodu vektora $\boldsymbol{a}$ pripojíme začiatok vektora $\boldsymbol{b}$, potom spojením začiatku vektora $\boldsymbol{a}$ a koncového bodu vektora $\boldsymbol{b}$ dostávame vektor $\boldsymbol{c}$. Tri vektory sa sčítajú tak, že k súčtu dvoch vektorov sa pripočíta tretí vektor, a takto sa postupuje aj pri sčítaní viacerých vektorov, pričom na poradí sčítania vektorov nezáleží.

Jednotkový vektor

Jednotkový vektor je vektor, ktorého veľkosť je rovná číslu jedna ($|\boldsymbol{a}^0| = 1$). Smer jednotkového vektora je rovnaký ako je smer vektora, ktorý pomocou jednotkového vektora vyjadrujeme. Alebo má smer osí pravouhlého súradnicového systému, kde jednotkové vektory označujeme $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$.

Každý vektor je možné vyjadriť ako súčin jednotkového vektora v smere daného vektora a veľkosti tohto vektora.

Rozklad vektora

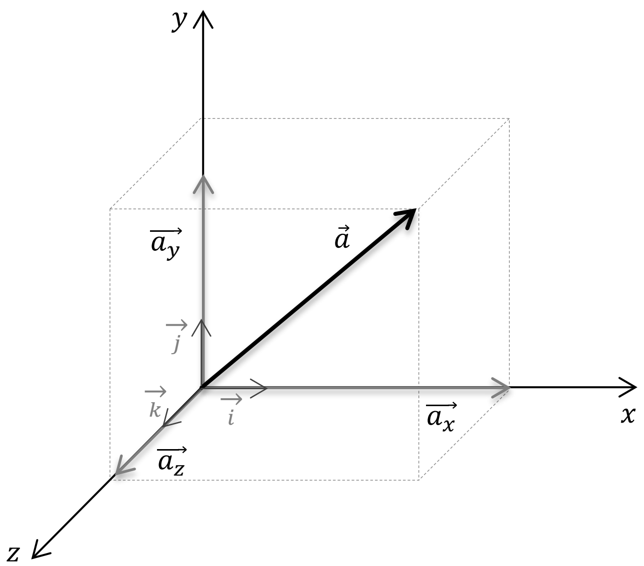
Pri rozklade vektoru $\boldsymbol{a}$ do smerov súradnicových osí x, y, z súradnicovej sústavy, kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory, ktoré majú smer totožný so smerom súradnicových osí, dostaneme zložky vektora $\boldsymbol{a}$, vektory $\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z$ (obr. 2.3). Tieto vektory sú kolmé priemety vektoru $\boldsymbol{a}$ do smeru osí súradnicovej sústavy a prostredníctvom jednotkových vektorov ich možno zapísať ako $\boldsymbol{a}_x = a_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{a}_y = a_y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}_z = a_z\boldsymbol{k}$. Vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$ v pravouhlej súradnicovej sústave so začiatkom v bode 0 je definovaný pomocou zložiek ako

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a možno ho zapísať aj ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ nasledovne

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

Veľkosť vektora v pravouhlej súradnicovej sústave je definovaná

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$



Obr. 2.3. Grafické znázornenie rozkladu vektora $\boldsymbol{a}$

Skalárny súčin vektorov

Výsledkom skalárneho súčinu dvoch nenulových vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ktoré zvierajú uhol α je skalár (číslo). Toto číslo vyjadruje plochu obdĺžnika, ktorého dĺžka strán je a, $b \cdot \cos\alpha$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\alpha = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

Tento vzťah platí pre skalárny súčin vektorov v prípade, že nie sú vektory navzájom rovnobežné a súčasne nie sú ani na seba kolmé. Ak sú vektory rovnobežné ($\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$), $\alpha = 0$, t. j. $\cos\alpha = 1$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b$ a skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ dosahuje maximálnu hodnotu. Ak sú vektory kolmé ($\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$), $\alpha = 90°$, t. j. $\cos\alpha = 0$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je nulový.

Pre skalárny súčin dvoch vektorov platí komutatívny zákon $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ a distributívny zákon $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

Skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je možné určiť tiež pomocou veľkosti zložiek vektorov a platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Potom je možné definovať aj veľkosť uhla α, ktorý dva vektory navzájom zvierajú, pričom platí

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\cdot\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}$$

Skalárny súčin sa používa pri vyjadrovaní fyzikálnych veličín a definovaní fyzikálnych zákonov. Príkladom skalárneho súčinu vo fyzike je napríklad práca konaná silou pri premiestňovaní telesa z jedného miesta na druhé. Práca je ekvivalentná zmene energii pri zdvíhaní telesa, keď sila $\boldsymbol{F}$ pôsobí pozdĺž vzdialenosti s a platí $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s} = F.s.\cos\varphi$. Skalárny súčin sa používa aj pri definovaní fyzikálnej veličiny kinetická energia. Ak sa teleso pohybuje v priestore, je potrebné vo vzťahu, ktorý definuje kinetickú energiu samostatne, umocniť jednotlivé zložky rýchlosti. Energia je skalárna fyzikálna veličina a teda nemá smer, ale hybnosť je vektorová fyzikálna veličina a smer má, jej vektor predstavuje súčin hmotnosti a rýchlosti. Kinetická energia v zhode s vektorovou analýzou je vyjadrená ako $E_k = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}m\left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right)$.

Delenie skalára vektorom alebo vektora vektorom nie je definované. Napríklad pre vektor sily definovaný z druhého Newtonovho zákona platí $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, ale zápis $m = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}}$ je chybný. Správne sa zapisuje $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, pre veľkosť platí $F = ma$ a pre hmotnosť platí $m = \frac{F}{a}$.

Vektorový súčin vektorov

Vektorovým súčinom vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{c}$, zapisuje sa

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

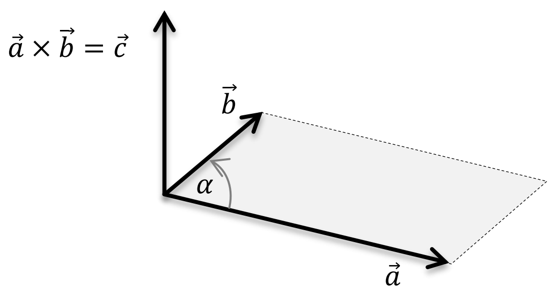
Ak sú vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ definované v trojrozmernom súradnicovom systéme prostredníctvom zložiek, t. j. $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ možno vektorový súčin vyjadriť

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \boldsymbol{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \boldsymbol{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

Veľkosť vektorového súčinu $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ určuje obsah rovnobežníka so stranami, ktoré tvoria vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (obr. 2.4). Veľkosť výsledného vektora $\boldsymbol{c}$ je daná skalárnym súčinom veľkosti vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\sin\alpha$, uhla α, ktorý tieto vektory navzájom zvierajú

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot sin\alpha$$

$$c = a\cdot b\cdot sin\alpha$$



Obr. 2.4. Grafické znázornenie vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$

Pre vektorový súčin dvoch vektorov neplatí komutatívny zákon $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = -|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}|$.

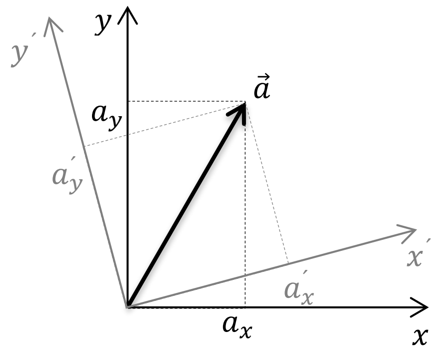
Smer výsledného vektora $\boldsymbol{c}$ je vždy kolmý na rovinu, v ktorej ležia vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a je orientovaný na tú stranu roviny, z ktorej sa premiestnenie vektrora $\boldsymbol{a}$ do smeru vektora $\boldsymbol{b}$ javí v kladnom zmysle, t. j. proti smeru hodinových ručičiek. Smer vektora $\boldsymbol{c}$ je možné určiť pravidlom pravotočivej skrutky. To znamená, ak v rovine nákresne otáčame s prvým vektorom v proti smere hodinových ručičiek, stotožníme ho s druhým vektorom, potom výsledný vektor smeruje k nám a je kolmý na rovinu nákresne.

Pomocou vektorového súčinu polohového vektora $\boldsymbol{r}$ a vektora sily $\boldsymbol{F}$ definujeme fyzikálnu veličinu moment sily $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Tak ako hybnosť je charakteristikou posuvného pohybu, charakteristikou otáčavého pohybu okolo osi neprechádzajúcej hmotným bodom je fyzikálna veličina moment hybnosti, ktorý je definovaný prostredníctvom vektorového súčinu ako $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v}) = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$. Veľkosť magnetickej sily $\boldsymbol{F}_M$ pôsobiacej na pohybujúci sa elektrický náboj závisí od rýchlosti a veľkosti daného náboja, veľkosti a smeru magnetického poľa a je definovaná vektorovým súčinom rýchlosti náboja a indukcie magnetického poľa $\boldsymbol{F}_M = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$.

Úlohy ku kapitole 2

1. Nech vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovine xy, jeho veľlosť je $a = 15{,}0\ \mathrm{m}$ a od osi x je odklonený proti smeru hodinových ručičiek o uhol 60° (obr. 2.5). Určte zložky vektora $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ v rovine xy. Ďalej máme sústavu súradníc určenú rovinou $x'y'$, ktorá je voči prvej sústave súradníc určenej osami x, y otočená o uhol 25°. Určte zložky vektora $\boldsymbol{a} = (a_x', a_y')$ v rovine x´y´.

   [$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y) = (7{,}5\ \mathrm{m};\ 13{,}0\ \mathrm{m})$, $\boldsymbol{a} = (a_x', a_y') = (12{,}3\ \mathrm{m};\ 8{,}6\ \mathrm{m})$*]*



Obr. 2.5. Grafické znázornenie vektora $\boldsymbol{a}$ v súradnicovej sústave $xy, x'y'$

2. Určte veľkosť vektora posunutia špičky minútovej ručičky nástenných hodín:
   a) od štvrť na štyri do pol štvrtej,
   b) za ďalšiu polhodinu,
   c) za ďalšiu hodinu,
   ak minútová ručička meria od osi otáčania po špičku 10 cm.

   [a) d_1 = 14 cm*, b) d_2 = 20* cm*, c) 0]*

3. Protón sa premiestni z počiatočnej polohy určenej súradnicami (-2, 4, -3) μm, do polohy (6, -2, -3) μm. Určte vektor posunutia protónu $\Delta\boldsymbol{r}$ a vyjadrite ho pomocou jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ v karteziánskej súradnicovej sústave. Zistite, či je vektor posunutia rovnobežný s niektorou súradnicovou rovinou alebo osou.

   [$\Delta\boldsymbol{r} = (8\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j})$ μm, *rovnobežný s rovinou xy]*

4. Netopier vyletel zo začiatočnej polohy $\boldsymbol{r}_1 = 5{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ do polohy $\boldsymbol{r}_2 = -2{,}0\boldsymbol{i} + 6{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$, všetky zložky vektora sú v metroch. Určte vektor posunutia a zistite, či je tento vektor rovnobežný s niektorou súradnicovou rovinou alebo osou.

   [$\Delta\boldsymbol{r} = 7{,}0\boldsymbol{i}$ m*, rovnobežný s osou x]*

5. Žeriav dvíha zo zeme náklad zvislo nahor s rýchlosťou o veľkosti v_1 = 0,8 m.s^{-1} a súčasne sa posúva po koľajniciach rýchlosťou o veľkosti v_2 = 0,6 m.s^{-1}. Určte veľkosť výslednej rýchlosti nákladu. *[v = 1* m.s^{-1}*]*

6. Človek, ktorý stojí na brehu rieky širokej 1 km sa chce dostať na druhý breh, priamo do miesta ležiaceho oproti cez rieku. Môže to urobiť dvomi spôsobmi:

a) plávať celý čas pod uhlom k smeru prúdu rieky tak, aby výsledná rýchlosť bola stále kolmá na breh,

b) plávať priamo k oproti ležiacemu brehu a vzdialenosť, o ktorú ho prúd rieky unesie, pôjde naspäť peši.

Rieka tečie rýchlosťou 2 km.h^{-1}, človek pláva rýchlosťou 2,5 km.h^{-1}, po brehu chodí rýchlosťou 4 km.h^{-1}. Ktorým z uvedených spôsobov človek dosiahne svoj cieľ skôr a o aký čas? *[spôsobom po b), t = 4* min*]*

7. Výsadkár padá v bezvetrí na danom úseku dráhy konštantnou rýchlosťou veľkosti 5 m.s^{-1}. Určte veľkosť rýchlosti a smer rýchlosti výsadkára, ak bude viať vietor vo vodorovnom smere rýchlosťou 3,5 m.s^{-1}. *[v = 6,1* m.s^{-1}*, α = 55°]*

8. Určte veľkosť a smer sily, ktorou je napínané vlákno, ak je na vlákne zavesené závažie s hmotnosťou 1 kg. Celá sústava je v pokoji. *[F = 9,81* N*, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{G}$]*

9. Biliardová guľa (1) pohybujúca sa rýchlosťou v_1 = 0,35 m.s^{-1} narazí na guľu (2), ktorá je pred nárazom v pokoji. Po zrážke sa guľa (1) naďalej pohybuje s rýchlosťou v_1'= 0,26 m.s^{-1} a vektor rýchlosti zviera so začiatočným smerom pohybu uhol α = 20°. Vypočítajte veľkosť rýchlosti gule (2) po zrážke a určte jej smer pohybu.
[v_2' = 0,14 m.s^{-1}*, β = 39°26´]*

10. Cestovná rýchlosť Boeingu je 907 km.h^{-1} smerom od juhu na sever a od západu prúdi vietor rýchlosťou 13 m.s^{-1}. Vypočítajte, aká je rýchlosť lietadla vzhľadom na povrch Zeme a o koľko sa lietadlo odchýli od smeru juh-sever. *[v = 252,3* m.s^{-1}, *φ = 3°]*

3. Kinematika

Mechanika je časť fyziky, ktorá skúma zákonitosti pokoja a mechanického pohybu telies a delí sa na kinematiku a dynamiku. Zmena polohy, premiestňovanie telesa vzhľadom na iné telesá sa nazýva **mechanický pohyb**. Pokoj alebo pohyb možno zisťovať iba vzhľadom na iné telesá, to znamená, že pohyb a pokoj je **relatívny**. Všetka hmota je v neustálom pohybe. Absolútny pokoj neexistuje, pohyb je základnou vlastnosťou všetkých telies. Pri opise pohybu telesa je potrebné vopred stanoviť, ktoré teleso je nehybné a s ním spojiť súradnicovú sústavu, vzhľadom na ktorú sa uvažuje poloha a pohyb telesa. Napríklad automobil sa pohybuje voči Zemi, budovy sú voči Zemi v pokoji, ale spolu sa so Zemou pohybujú voči Slnku.

Kinematika je časť mechaniky popisujúca priebeh pohybov telies v priestore a čase (tvar dráhy, priebeh pohybu po dráhe v závislosti od času), pritom nerieši príčiny týchto pohybov.

Hmotný bod je fyzikálny objekt, ktorý z hľadiska vzájomného pôsobenia s inými bodmi, má vlastnosti reálneho telesa, zachováva sa jeho hmotnosť, ale možno zanedbať jeho rozmery, tvar, priestorovú orientáciu a všetky ostatné vlastnosti, ktoré sa pri vyšetrovaní mechanického pohybu neprejavujú. Pohyb takého telesa možno nahradiť pohybom jedného bodu.

Na popis pohybu sa používajú vo fyzike pohybové rovnice, ktoré umožňujú určiť polohu pohybujúceho sa hmotného bodu, telesa v ľubovoľnom okamihu vo vopred zvolenej vzťažnej sústave. **Vzťažná sústava** je sústava telies, vzhľadom ku ktorým vzťahujeme pohyb alebo pokoj sledovaného hmotného bodu. Vzťažnú sústavu je potrebné voliť tak, aby matematické riešenie pohybových rovníc bolo čo najjednoduchšie. Treba si uvedomiť, že ak vyjadríme zmenu polohy pomocou zmeny súradníc, nebudú naše pohybové rovnice vyjadrovať dráhu, ktorú prejde teleso za odpovedajúci čas. Hmotný bod sa vzhľadom na vzťažný bod pohybuje, ak mení svoju polohu vzhľadom na tento bod, pričom pohyb prebieha v čase. Polohu hmotného bodu vzhľadom k zvolenej vzťažnej sústave možno určiť súradnicami $x,\ y,\ z$ alebo polohovým vektorom.

Polohový vektor je vektor spojený vždy so začiatkom súradnicovej sústavy a hmotným bodom, ktorý voči začiatku udáva polohu hmotného bodu v danom okamihu a možno ho vyjadriť vzťahom

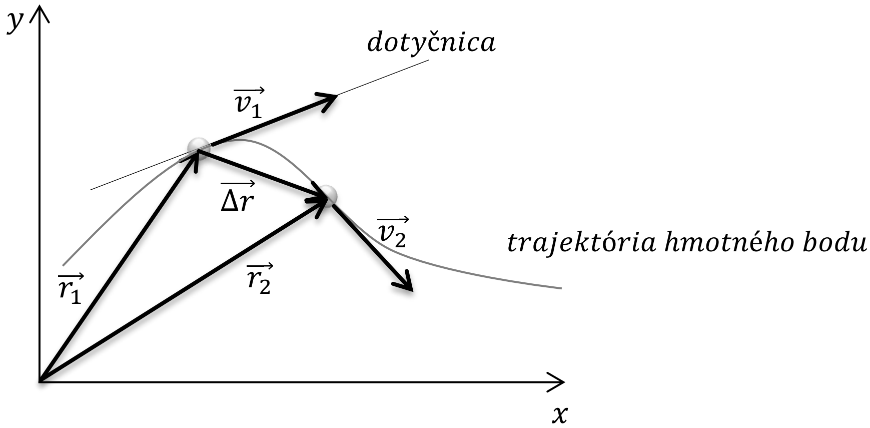
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

kde $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osí a pre veľkosť vektora platí

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Napríklad polohový vektor $\boldsymbol{r}_1$ určuje polohu hmotného bodu v čase t_1 a polohový vektor $\boldsymbol{r}_2$ v čase $t_2 = t_1 + \Delta t$ (obr. 3.1).



Obr. 3.1. Grafické znázornenie polohového vektora a vektora rýchlosti

Postupnosť polôh pohybujúceho sa hmotného bodu, vzhľadom na zvolený vzťažný bod v priestore, sa nazýva **trajektória**. Trajektória je geometrická čiara, ktorú hmotný bod pri pohybe opisuje. Podľa tvaru trajektórie sa rozdeľujú pohyby na priamočiare a krivočiare. Vzdialenosť, ktorú hmotný bod prejde za určitý čas, meraná pozdĺž trajektórie sa nazýva **dráha**. Dráhu označujeme s, jednotkou dráhy je meter (m).

3.1. Rýchlosť hmotného bodu

Rýchlosť je vektorová fyzikálna veličina určená smerom, veľkosťou a orientáciou. Podľa veľkosti rýchlosti sa pohyby rozdeľujú na rovnomerné a nerovnomerné.

Priemerná rýchlosť je rýchlosť, ktorou by teleso prešlo tú istú dráhu za rovnaký čas, ako keby sa pohybovalo po tejto dráhe rovnomerne. V praxi sa zavádza pojem priemerná rýchlosť, pretože pohyb telies je často nerovnomerný. Veľkosť priemernej rýchlosti je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

kde Δs je dĺžka dráhy, ktorú hmotný bod prešiel za časový interval Δt. Jednotka rýchlosti je meter za sekundu ($\mathrm{m.}s^{-1}$) a v dopravných prostriedkoch sa používa jednotka kilometer za hodinu ($\mathrm{km.\,h^{-1}}$).

Čím bude časový interval kratší ($\Delta t \to 0$), tým je väčšia pravdepodobnosť, že sa rýchlosť pohybu hmotného bodu nebude meniť. **Okamžitá rýchlosť** je vektorová fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje rýchlosť telesa v danom mieste alebo v danom okamihu a má vždy smer dotyčnice ku trajektórii (obr. 3.1). Zmena polohového vektora $\Delta\boldsymbol{r}$, ktorá nastáva pri pohybe hmotného bodu za čas Δt, je určená rozdielom polohových vektorov $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Vektor a veľkosť okamžitej rýchlosti sú definované vzťahmi

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \boldsymbol{v} = \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$$

kde $\Delta \boldsymbol{r}$ je zmena polohového vektora a $|\Delta \boldsymbol{r}|$ je veľkosť zmeny polohového vektora. Využitím matematických pojmov limita a derivácia, vektor a veľkosť okamžitej rýchlosti možno definovať vzťahmi

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

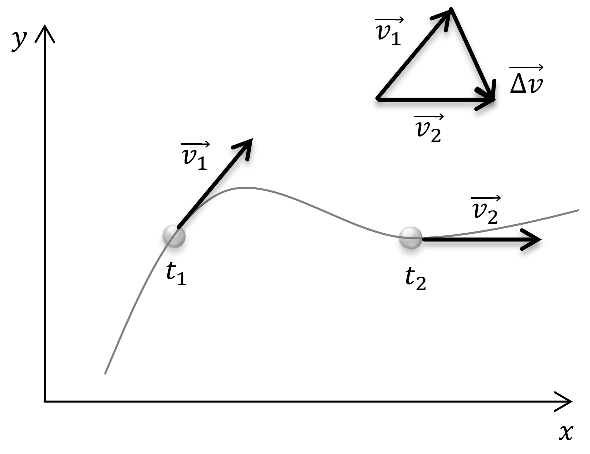
Vzhľadom na vyjadrenie polohového vektora $\boldsymbol{r}$ možno pre vektor rýchlosti písať

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

a pre veľkosť vektora rýchlosti platí $|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

3.2. Zrýchlenie hmotného bodu

Pri pohybe hmotného bodu po trajektórii má hmotný bod v čase t_1 rýchlosť $\boldsymbol{v}_1$, v čase t_2 rýchlosť $\boldsymbol{v}_2$ a zmena vektora rýchlosti $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ za čas $\Delta t = t_2 - t_1$ vyjadruje vektor zrýchlenia (obr. 3.2).



Obr. 3.2. Grafické znázornenie zmeny vektora rýchlosti

Vektor **zrýchlenia** $\boldsymbol{a}$ je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

Jednotka zrýchlenia je meter za sekundu na druhú $(\mathrm{m.s^{-2}})$. Zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ hmotného bodu je vektorová fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje časovú zmenu vektora rýchlosti, t. j. zmenu veľkosti a zmenu smeru. Veľkosť zrýchlenia vyjadruje priemernú zmenu rýchlosti $\Delta \boldsymbol{v}$ za čas Δt, za ktorý táto zmena nastala a je definovaná vzťahom

$$|\boldsymbol{a}| = a = \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t}$$

V prípade priamočiareho pohybu hmotného bodu je smer vektora zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ totožný so smerom pohybu hmotného bodu a zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ má buď rovnaký smer ako rýchlosť $\boldsymbol{v}$ (**pohyb zrýchlený**) alebo má opačný smer ako rýchlosť $\boldsymbol{v}$ (**pohyb spomalený**). Pri priamočiarom pohybe sa určuje zrýchlenie zo zmeny veľkosti rýchlosti (obr. 3.3) a platí

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1}$$

Okamžité zrýchlenie je vektorová fyzikálna veličina, ktorá udáva zmenu vektora rýchlosti $\Delta \boldsymbol{v}$ za časový interval Δt, pričom sa tento blíži k číslu nula. V súlade s matematickými pojmami limita a derivácia je definovaný vektor zrýchlenia a veľkosť vektora zrýchlenia vzťahmi

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Vzhľadom na vyjadrenie vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a polohového vektora $\boldsymbol{r}$ možno pre vektor zrýchlenia písať

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}$$

Pre veľkosť vektora zrýchlenia platí

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

Pri krivočiarom pohybe vždy dochádza k zrýchleniu, pretože sa mení smer vektora okamžitej rýchlosti $\boldsymbol{v}$. Vektor zrýchlenia sa pri krivočiarom pohybe rozkladá na tangenciálnu zložku $\boldsymbol{a}_t$ (dotyčnicovú) a normálovú zložku $\boldsymbol{a}_n$ (dostredivú)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

Vektor $\boldsymbol{a}_t$ má smer dotyčnice ku trajektórii v danom bode, teda rovnako ako vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a vektor $\boldsymbol{a}_n$ má v danom bode smer kolmice. Zmenu smeru rýchlosti vyjadruje normálové zrýchlenie $\boldsymbol{a}_n$, ak je $a_n = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ hmotný bod sa pohybuje po priamke, koná priamočiary pohyb. Pri pohybe po kružnici sa normálové zrýchlenie nazýva aj dostredivé zrýchlenie. Zmenu veľkosti rýchlosti vyjadruje tangenciálne zrýchlenie $\boldsymbol{a}_t$, ak $a_t = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ hmotný bod sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, koná rovnomerný pohyb. Pre veľkosť jednotlivých zložiek platí $a_t = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{r}$, kde r je polomer krivosti krivky.

3.3. Druhy mechanických pohybov

Nech $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{v}^0$ je vektor rýchlosti, potom jednotkový vektor $\boldsymbol{v}^0$ udáva smer vektora a v veľkosť vektora. Rýchlosť hmotného bodu v akomkoľvek bode jeho dráhy má vždy smer dotyčnice v uvažovanom bode dráhy (obr. 3.2). Ak

$v = konšt., \boldsymbol{v}^0 = konšt.$ hmotný bod koná rovnomerný priamočiary pohyb,
$v = konšt., \boldsymbol{v}^0 \neq konšt.$ hmotný bod koná rovnomerný krivočiary pohyb,
$v \neq konšt., \boldsymbol{v}^0 = konšt.$ hmotný bod koná nerovnomerný priamočiary pohyb,
$v \neq konšt., \boldsymbol{v}^0 \neq konšt.$ nerovnomerný krivočiary pohyb.

Ak sa rýchlosť mení v čase rovnomerne, ide o pohyb rovnomerne zrýchlený alebo spomalený. Nižšie sú popísané niektoré z najjednoduchších mechanických pohybov.

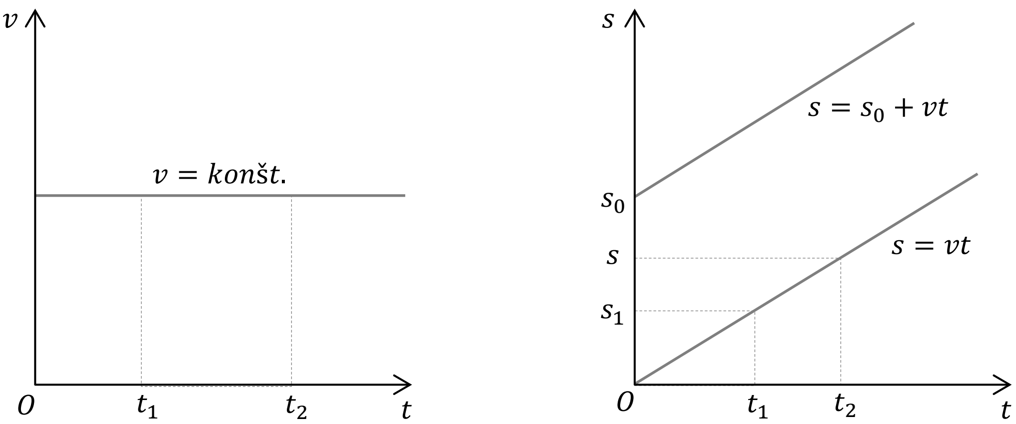
Rovnomerný priamočiary pohyb

Ak hmotný bod za rovnaké časové intervaly Δt prejde rovnaké dráhy Δs, koná **rovnomerný priamočiary pohyb**, $v = konšt.$, $\boldsymbol{v} = konšt.$ Ak mal hmotný bod v čas t_0 dráhu s_0, za čas t prejde dráhu s, pre veľkosť rýchlosti platí

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ak v čase $t_0 = 0\ s$ $s_0 = 0\ m$ pre veľkosť veľkosť rýchlosti platí $v = \frac{s}{t}$ a pre dráhu platí $s\ = vt$. Dráha rovnomerného pohybu je lineárnou funkciou času (obr. 3.3). Ak v čase $t_0 = 0$ s, s_0 je dĺžka dráhy, ktorú hmotný bod prešiel platí $\Delta s = v\Delta t$ a platí vzťah

$$s = s_0 + vt$$

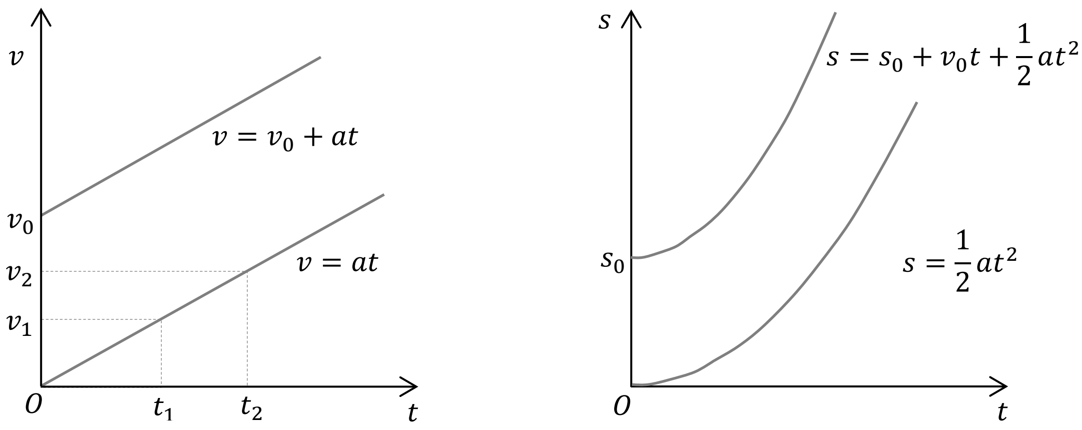


Obr. 3.3. Graf závislosti rýchlosti a dráhy rovnomerného pohybu od času

Rovnomerne zrýchlený (spomalený) priamočiary pohyb

Rovnomerne zrýchlený pohyb koná teleso, ak veľkosť okamžitej rýchlosti hmotného bodu rovnomerne rastie (pri spomalenom pohybe rovnomerne klesá) s konštantným zrýchlením $a = konšt.$ Smer okamžitej rýchlosti sa nemení, teda $\Delta\boldsymbol{v} = konšt.$ a časová zmena rýchlosti je tiež konštantná $\Delta v = konšt$. Veľkosť rýchlosti rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu je lineárnou funkciou času (obr. 3.4).

Obr. 3.4. Graf závislosti rýchlosti dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu od času



Celková zmena rýchlosti $\Delta\boldsymbol{v}$ (zväčšenie alebo zmenšenie rýchlosti) za časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$ je určená súčinom zrýchlenia a časovej zmeny $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\Delta t$. Ak sa hmotný bod pohyboval už na začiatku merania času $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ začiatočnou rýchlosťou $v_0 \neq 0\,\mathrm{m.s^{-1}}$ konečná rýchlosť v čase t bude vyjadrená vzťahom

$$v = v_0 \pm at$$

Ak hmotný bod do začiatku merania času prešiel dráhu s_0 a má v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ nenulovú začiatočnú rýchlosť $v_0 \neq 0\,\mathrm{m.s^{-1}}$, potom pre celkovú dráhu, ktorú hmotný bod prešiel platí vzťah

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$$

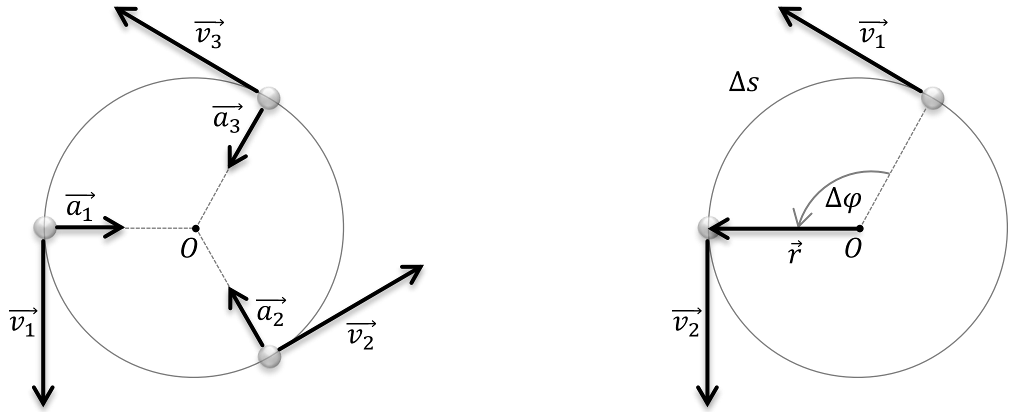
Medzi špeciálne pohyby rovnomerne zrýchlené, spomalené patria zvislé vrhy. Sú to pohyby hmotného bodu v tiažovom poli Zeme a pohybujú sa tiažovým zrýchlením $a = g$, viac v kapitole 5. Gravitačné pole.

Ak uvažujeme teleso a všetky body telesa sa posúvajú v rovnakých časových intervaloch v tom istom smere o rovnakú vzdialenosť, t. j. všetky body sa pohybujú rovnakými rýchlosťami, tak teleso koná **posuvný (translačný) pohyb**. **Otáčavý (rotačný) pohyb** vykonáva teleso okolo osi pod účinkom sily, ktorá smeruje v každom okamihu do stredu (táto sila sa nazýva dostredivá, viac o silách v kapitole 4. Dynamika).

Rovnomerný pohyb po kružnici

Hmotný bod koná **krivočiary pohyb,** ak sa smer jeho vektora okamžitej rýchlosti mení. Najjednoduchším krivočiarym pohybom je rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici.

Pri rovnomernom pohybe po kružnici sa nemení veľkosť rýchlosti $v = konšt.$, ale mení sa smer rýchlosti $\boldsymbol{v} \neq konšt.$, to znamená, že ide o pohyb so zrýchlením. Okamžitá rýchlosť hmotného bodu $\boldsymbol{v}$ má v každom bode krivky smer dotyčnice ku dráhe. V danom čase, v danom mieste krivky majú vektory rýchlostí $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ smer dotyčnice ku krivke a vektory zrýchlenia smerujú do stredu otáčania. Hmotný bod vykonáva rovnomerný pohyb po kružnici, ak v rovnakých časových intervaloch Δt opíše rovnako dlhé oblúky kružnice Δs, pričom polohový vektor $\boldsymbol{r}$ opíše rovnako veľké stredové uhly $\Delta\varphi$, pre ktoré platí $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$ (obr. 3.5).



Obr. 3.5. Rýchlosť a zrýchlenie rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici

Obvodová rýchlosť hmotného bodu, je určená zo základného definičného vzťahu pre rýchlosť a po dosadení $\Delta s = r\Delta\varphi$ je možno vyjadriť veľkosť ako

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Uhlová rýchlosť ω udáva uhol $\Delta\varphi$, ktorý opíše sprievodič hmotného bodu $\boldsymbol{r}$ za príslušný časový interval Δt

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{r\Delta t} = \frac{v}{r}$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu ($\mathrm{rad.s^{-1}}$ alebo $\mathrm{s^{-1}}$). Veľkosť polohového vektora $\boldsymbol{r}$ je rovná polomeru krivosti. Súvis medzi veľkosťou obvodovej a veľkosťou uhlovej rýchlosti vyjadruje vzťah

$$v = r\omega$$

Pre vektory obvodovej, uhlovej rýchlosti a polohového vektora platí

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Pri rovnomernom pohybe po kružnici je uhlová rýchlosť konštantná, $\omega = konšt.$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ za časový interval Δt opíše uhol

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

φ_0 je uhol, ktorý zviera polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu vzhľadom na stred otáčania v čase $t_0 = 0\ \mathrm{s}$.

Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici je periodický. **Perióda** T (obežná doba) je čas, za ktorý polohový vektor $\boldsymbol{r}$ opíše uhol 2π (hmotný bod jedenkrát prejde dráhu kružnice). Po dosadení uhla a periódy do definičného vzťahu pre uhlovú rýchlosť, platí

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$

Frekvencia f určuje počet obehov, otáčok, vykonaných hmotným bodom za jednu sekundu. Frekvencia je určená prevrátenou hodnotou periódy T. Jednotkou periódy je sekunda (s) a jednotka frekvencie je hertz ($\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$).

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Pri rovnomernom pohybe po kružnici nedochádza ku zmene veľkosti rýchlosti, t. j. veľkosť tangenciálneho zrýchlenia $a_t = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Normálové zrýchlenie $\boldsymbol{a}_n$ charakterizuje zmenu smeru vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a pri rovnomernom pohybe po kružnici je teda nenulové a nazýva sa dostredivé zrýchlenie $\boldsymbol{a}_d$. Veľkosť dostredivého zrýchlenia rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici je definovaná vzťahom

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

Úlohy ku kapitole 3

1. Určte priemernú rýchlosť atléta na vzdialenosti 600 m, ktorú zabehol za čas 1,5 min. *[$v_p = 6{,}7$ m.s^{-1}]*

2. Akou priemernou rýchlosťou sa pohyboval vlak, ak prešiel rýchlosťou 30 km.h^{-1} prvú tretinu dráhy, rýchlosťou 90 km.h^{-1} druhú tretinu dráhy a tretiu tretinu dráhy prešiel rýchlosťou 45 km.h^{-1}? *[$v_p = 45$ km.h^{-1}]*

3. Aká je priemerná rýchlosť pohybu automobilu v prípade, že:
   a) prvú polovicu času svojho pohybu sa pohybuje rýchlosťou v_1 = 100 km.h^{-1} a druhú polovicu času sa pohybuje rýchlosťou v_2 = 60 km.h^{-1};
   b) polovicu zo svojej celkovej dráhy prejde rýchlosťou v_1 = 100 km.h^{-1} a druhú polovicu dráhy rýchlosťou v_2 = 60 km.h^{-1}? *[a) $v_p = 80$ km.h^{-1}, b) $v_p = 75$ km.h^{-1}]*

4. Turista šiel 2 hodiny po rovine rýchlosťou 6 km.h^{-1}, ďalšiu hodinu stúpal do prudkého kopca rýchlosťou 3 km.h^{-1}. Akou priemernou rýchlosťou sa pohyboval? *[$v_p = 5$ km.h^{-1}]*

5. Za aký čas prejde svetlo zo Slnka na Zem, ak priemerná vzdialenosť Slnko – Zem je 149,6.10^6 km a rýchlosť svetla je 300.10^6 m.s^{-1}. *[$t = 8$ min $18{,}7$ s]*

6. Loď sa pohybuje vzhľadom na breh rieky rýchlosťou 10 km.h^{-1}. Na palube lodi, sa pohybuje človek rýchlosťou 4 km.h^{-1} kolmo na smer pohybu lode. Aká je rýchlosť človeka vzhľadom na breh? *[$v = 10{,}8$ km.h^{-1}]*

7. Vlak prechádza tunelom dlhým 1,6 km tak, že od vjazdu lokomotívy do tunela do výjazdu posledného vagónu z tunela uplynie 1,5 minúty. Ak je vlak dlhý 200 m tak akou rýchlosťou sa pohybuje? *[$v = 72$ km.h^{-1}]*

8. Z dvoch miest vzdialených od seba 7 km vyjdú súčasne dvaja chodci. Ak pôjdu proti sebe, stretnú sa za čas t_1 = 28 min, ak pôjdu za sebou, stretnú sa za čas t_2 = 85 min. Aké sú rýchlosti obidvoch chodcov? *[$v_1 = 2{,}8$ m.s^{-1}, $v_2 = 1{,}4$ m.s^{-1}]*

9. Auto ide z bodu A do bodu B rýchlosťou 78 km.h^{-1} naspäť rýchlosťou 82 km.h^{-1}. Ak by auto išlo tam aj späť rýchlosťou 81 km. h^{-1} cesta by trvala o 5 minút kratšie. Aká je vzdialenosť medzi bodmi A a B? *[$s = 514$ km]*

10. Rýchlejšie idúci automobil Škoda Kodiaq na diaľnici začína predbiehať 15 m za autom idúcim menšou rýchlosťou a zaradí sa pred toto auto, keď je ich vzájomná vzdialenosť 25 m. Rýchlosti áut sú 100 km.h^{-1}, 125 km.h^{-1} a dĺžka áut je 4,7 m. Aký čas je potrebný na predbiehanie a akú dráhu pri tom prešlo auto? *[$t = 6{,}4$ s, $s = 223{,}5$ m]*

11. Zo železničnej stanice Bratislava odišiel vlak na poludnie a pohybuje sa priemernou rýchlosťou 112 km.h^{-1} smerom ku stanici, ktorá je vzdialená 203 km. Zo stanice Žilina odíde druhý vlak o 13:00 priemernou rýchlosťou 90 km.h^{-1} ku stanici Bratislava. Vypočítajte, o koľkej a kde sa vlaky stretnú.
    [stretnú sa o 13:27, 162,5 km od stanice Bratislava]

12. Automobil a vlak idú po priamej dráhe. Osobný vlak ide po trati rýchlosťou v_v a automobil po ceste rovnobežnej s vlakovou traťou rýchlosťou v_a a predbehne vlak za čas t_1. Ak pôjde oproti vlaku, bude míňať vlak za čas t_2. Vyjadrite aká je dĺžka vlaku l a veľkosť rýchlosti vlaku v_v, ak je rýchlosť auta v_a známa. *[*$v_v = v_a \frac{(t_1-t_2)}{(t_1+t_2)}$, $l = \frac{2t_1t_2v_a}{(t_1+t_2)}$*]*

13. Vlak sa rozbieha rovnomerne zrýchleným pohybom. Za prvých 30 sekúnd prejde dráhu 90 metrov. Vypočítajte dráhu, ktorú prejde za 60 sekúnd a okamžitú rýchlosť v čase 60 sekúnd od začiatku pohybu. Aká bola priemerná rýchlosť vlaku?
[s = 360 m*,* v_p *= 6* m.s^{-1}*, v = 12* m.s^{-1}*]*

14. Šofér automobilu, ktorého rýchlosť na začiatku je 45 km.h^{-1} a zvýši rýchlosť na 60 km.h^{-1} za 12 s a ďalej zvyšuje rýchlosť s rovnakým zrýchlením. Za aký čas zväčší rýchlosť automobil zo 60 km.h^{-1} na 130 km.h^{-1}? *[t = 56* s*]*

15. Lietadlo sa rozbieha z pokoja rovnomerne zrýchlene a rýchlosť 60 m.s^{-1} dosiahne za čas 15 s. Určte veľkosť zrýchlenia lietadla a dráhu, ktorú pri rozbiehaní prejde.
[a = 4 m.s^{-2}*, s = 450* m*]*

16. Automobil sa pohyboval rýchlosťou 108 km.h^{-1}. Keď vodič zbadal prekážku, začal brzdiť so spomalením 6 m.s^{-2}, pričom reakčná doba vodiča je 0,5 s. Vypočítajte celkovú dráhu, ktorú automobil prejde od okamihu, keď vodič zbadal prekážku až do zastavenia.
[s = 90 m*]*

17. Osobný vlak prejde 700 m a brzdí pritom tak, že veľkosť opačného zrýchlenia je 0,15 m.s^{-2}. Ako dlho brzdí a aká je konečná rýchlosť vlaku, keď začiatočná rýchlosť bola 55 km.h^{-1}? *[t = 69,6* s*; v = 4,8* m.s^{-1}*]*

18. Rovnomerným pohybom by priamu pretekársku dráhu cyklista prešiel za čas t_1 = 8 min rýchlosťou *v* = 36 km.h^{-1}. Za aký čas by túto priamu pretekársku dráhu prešlo auto rovnomerne zrýchleným pohybom, ak rýchlosť *v* = 36 km.h^{-1} dosiahne auto z pokoja za čas 100 s? *[t = 310* s*]*

19. Osobné auto dobieha rýchlosťou 30 m.s^{-1} nákladné auto, ktoré ide stálou rýchlosťou 10 m.s^{-1}. Vo vzdialenosti 50 m od nákladného auta vodič osobného auta zistí, že nemôže nákladné auto obehnúť. Preto začne brzdiť so zrýchlením 5 m.s^{-2}. Dôjde ku zrážke vozidiel?
[áno, za čas 2 s dobehne osobné auto nákladné, pričom rýchlosť osobného auta bude 20 m.s^{-1}*, zatiaľ čo rýchlosť nákladného auta 10* m.s^{-1}*]*

20. Dve telesá vzdialené od seba 100 metrov na začiatku sa pohybujú proti sebe. Prvé teleso rovnomerným pohybom s rýchlosťou v_1 = 3 m.s^{-1}, druhé rovnomerne zrýchleným pohybom so začiatočnou rýchlosťou v_0 = 7 m.s^{-1} a so zrýchlením *a* = 4 m.s^{-2}. Nájdite miesto a čas ich stretnutia.
[15 m *od začiatočnej polohy prvého telesa, t = 5* s*]*

21. Automobil znížil svoju rýchlosť na 50 km.h^{-1} rovnomerným spomaleným pohybom s veľkosťou zrýchlenia 2,5 m.s^{-2}. Akou veľkou rýchlosťou šiel do okamihu brzdenia, ak brzdná dráha bola 100 m? [v_0 = 95 km.h^{-1}]

22. Vodič auta uvidí v spätnom zrkadle policajné auto a začne brzdiť. Na vzdialenosti 88 m z rýchlosti 75 km.h^{-1} spomalí na 45 km.h^{-1}.

    a) vypočítajte zrýchlenie auta, ak predpokladáme, že v okamihu brzdenia bolo zrýchlenie konštantné;
    b) určte, ako dlho v tejto fáze pohybu brzdil;
    c) vodič pokračuje v brzdení s veľkosťou zrýchlenia určeného v bode a., zistite za aký čas od začiatku brzdenia auto zastaví;
    d) akú vzdialenosť automobil prejde od začiatku brzdenia do okamihu zastavenia.

    [a) a = - 1,6 m.s^{-2}, b) t = 5,4 s, c) t_z = 13,2 s, d) s = 137 m]

23. Polomer Zeme je 6371 km. Určte uhlovú a obvodovú rýchlosť otáčania Zeme. [ω = 7,27 s^{-1}, v = 465,3 m.s^{-1}]

24. Vypočítajte periódu T, obvodovú rýchlosť v, uhlovú rýchlosť ω a dostredivé zrýchlenie a_d hmotného bodu pohybujúceho sa na obvode kolesa s polomerom 50 cm, ak vykoná 120 otáčok za minútu. [T = 0,5 s, v = 6,28 m.s^{-1}, ω = 12,57 s^{-1}, a_d = 79 m.s^{-2}]

25. Určte akou uhlovou rýchlosťou sa Zem otáča okolo zemskej osi. [ω = 7,3. 10^{-5} rad.s^{-1}]

26. Auto sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 108 km.h^{-1}. Vypočítajte veľkosť obvodovej, uhlovej rýchlosti a počet otáčok kolesa automobilu, ak je polomer kolesa 30 cm. [v = 30 m.s^{-1}, ω = 100 s^{-1}, f = 16 s^{-1}]

27. Určte veľkosť normálového zrýchlenia na obvode rotora odstredivky, ktorej polomerom je 12 cm, ak vykoná 1400 otáčkach za jednu minútu. [a_n = 2579 m.s^{-2}]

28. Rýchlosť rovnomerného pohybu družice po kružnici okolo Zeme je 7,46 km.s^{-1}. Družica sa pohybuje vo výške 800 km nad povrchom Zeme. Polomer Zeme je 6371 km. Určte obežnú dobu družice okolo Zeme. [T = 6040 s]

29. Určte polomer kolesa, ak pri jeho otáčavom pohybe má bod na obvode kolesa 3-krát väčšiu rýchlosť ako bod o 10 cm bližšie k osi otáčania. [r = 15 cm]

30. Vo zvislej rovine roztočíte kameň upevnený na niti dlhej 50 cm. V okamihu, keď bude smer rýchlosti kameňa zvislo nahor z ruky pustíte niť s kameňom a ten vyletí do výšky 6 m. Určte, aká bola frekvencia otáčania kameňa pri pohybe po kružnici. [f = 3,45 s^{-1}]

31. Koleso sa otáča s frekvenciou f = 30 s^{-1} a jeho brzdením dosiahneme, že jeho pohyb bude rovnomerne spomalený a koleso zastaví za časový interval Δt = 30 s. Určte, s akým uhlový zrýchlením koleso zastavovalo a koľko otáčok vykonalo koleso od začiatku brzdenia do zastavenia. [ε = 6,28 s^{-2}, n = 450]

32. Vlak rovnomerne spomaleným pohybom prejde dráhu s = 1,3 km zakrivenú do tvaru kružnice, ktorej polomer je r = 1,3 km. Vypočítajte veľkosť celkového zrýchlenia

ľubovoľného bodu vlaku na začiatku a konci zakrivenej železničnej trati. Rýchlosť vlaku na začiatku zakrivenej trate v_1 = 72 km.h^{-1} a na konci tejto časti trate v_2 =36 km.h^{-1}.

[a_1 = 0,328 m.s^{-2}*, a_2 = 0,138* m.s^{-2}*]*

4. Dynamika

Dynamika je časť mechaniky, ktorá sa zaoberá príčinami pohybu hmotných bodov, telies, fyzikálnych objektov a zavádza pojem sily, hybnosti atď. **Sila** je mierou zmeny pohybového stavu a mierou vzájomného pôsobenia dvoch telies na seba. Napríklad pri ťahaní, tlačení, dvíhaní telies výsledok silového pôsobenia závisí od veľkosti, smeru, miesta pôsobenia na teleso. Sila vyjadruje vzájomné pôsobenie telies pri vzájomnom dotyku telies alebo prostredníctvom silových polí. Pri pôsobení prostredníctvom silových polí nemusí dôjsť k priamemu dotyku, napr. Zem pôsobí príťažlivou silou na iné telesá, dva magnety na seba, priťahuje sa navzájom Zem a Mesiac atď. Pri priamom dotyku napríklad pri náraze dvoch telies. Sila pôsobiaca na teleso vyvolá na telese zrýchlenie alebo deformáciu.

Sila je vektorová fyzikálna veličina, označuje sa $\boldsymbol{F}$ a je určená veľkosťou, smerom a polohou pôsobiska (obr. 2.1). Silu je možné rozložiť na niekoľko jej zložiek, nech n je počet zložiek, na ktoré je možné silu rozložiť. Vektorové pravidlo platí aj opačne, výsledná sila sa rovná vektorovému súčtu všetkých síl $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$ pôsobiacich na hmotný bod

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

Ak na teleso pôsobí viac síl súčasne v tom istom bode, ich účinok na teleso je taký, ako by naň pôsobila jediná sila, **výslednica**, ktorá sa rovná vektorovému súčtu pôsobiacich síl. Ak je výslednica síl $\boldsymbol{F}$ nulová, teleso je v rovnováhe.
Podľa druhu pôsobenia alebo podľa druhu fyzikálnych objektov, ktoré na seba navzájom pôsobia sú definované sily tlaková, trecia, tiažová, gravitačná, elektrická, magnetická, jadrová atď.

4.1. Newtonove pohybové zákony

Dynamika je časť mechaniky, ktorá popisuje príčiny pohybov telies. Dynamika je založená na troch **Newtonových pohybových zákonoch** platných v inerciálnych vzťažných sústavách.

Izolované teleso je teleso, ktoré nie je v žiadnom vzájomnom silovom pôsobení s iným fyzikálnym objektom. **Inerciálna vzťažná sústava** je sústava, v ktorej izolované telesá, hmotné body zotrvávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe a zmenu ich stavu môže spôsobiť iba ich vzájomné pôsobenie s inými fyzikálnymi objektmi. Ak je skúmané teleso spojené s **neinerciálnou vzťažnou sústavou**, potom okrem síl, ktoré popisujú pohyb v inerciálnej vzťažnej sústave, berú sa do úvahy aj tzv. zotrvačné sily. V neinerciálnej vzťažnej sústave nastáva zmena pohybového stavu telesa bez silového pôsobenia iných telies.

Prvý Newtonov pohybový zákon – zákon zotrvačnosti:

Každý hmotný bod v inerciálnej vzťažnej sústave zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútené vonkajšími silami tento svoj pohybový stav zmeniť.

Pre izolované telesá je pokoj a rovnomerný priamočiary pohyb zhodný pohybový stav, pre ktorý platí, že vektor rýchlosti je konštantný, t. j. $v = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$ (teleso je v pokoji), alebo $v = konšt.$ rôzna od nuly (teleso koná rovnomerný priamočiary pohyb). Zrýchlenie telesa je nulové. Ak na teleso začnú pôsobiť iné telesá silami, pričom ich výslednica nebude nulová, nastane zmena pohybového stavu, t. j. mení sa rýchlosť a dochádza ku zrýchleniu telesa. To isté teleso dosiahne väčšie zrýchlenie pôsobením väčšej sily a pri pôsobení tejto sily sa dá dosiahnuť väčšie zrýchlenie pri menšej hmotnosti telesa.

Druhý Newtonov pohybový zákon – zákon sily:

Pomer zmeny hybnosti Δp hmotného bodu a času Δt, za ktorý táto zmena nastala, je priamo úmerný výslednej pôsobiacej sile $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

Sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na hmotný bod je priamo úmerná zrýchleniu $\boldsymbol{a}$ tohto hmotného bodu a má smer pôsobiacej sily. Ak je hmotnosť m počas zmeny času Δt konštantná, je možno pre silu písať

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = \frac{m\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = m\boldsymbol{a}$$

Druhý Newtonov pohybový zákon je možné potom formulovať nasledovne: **Zrýchlenie telesa $\boldsymbol{a}$, ktoré sila $\boldsymbol{F}$ udeľuje telesu je priamo úmerné tejto sile a nepriamo úmerné hmotnosti m telesa.** Pre vektor sily a veľkosť vektora sily platí

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad\qquad F = ma$$

Z definície sily je odvodená jednotka sily newton (N), $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$. 1 newton je sila, ktorá udelí telesu s hmotnosťou $1\ \mathrm{kg}$ zrýchlenie veľkosti $1\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Špeciálnym prípadom sily je tiaž telesa. **Tiaž** telesa $\boldsymbol{G}$ je sila, ktorou teleso pôsobí na vodorovnú podložku alebo na nehybný zvislý záves a udeľuje telesu **tiažové zrýchlenie** $\boldsymbol{g}$, pre ktorého veľkosť v našich zemepisných šírkach platí $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Z druhého pohybového zákona je definovaný vektor tiaže a veľkosť tiaže telesa vzťahom

$$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g} \qquad\qquad G = mg$$

Príkladom pohybu s konštantným zrýchlením je voľný pád. **Tiažová sila** $\boldsymbol{F}_G$ je sila, ktorou Zem priťahuje všetky telesá vo svojej tesnej blízkosti a spôsobuje voľný pád telesa s tiažovým zrýchlením $\boldsymbol{g}$ (viac o voľnom páde v kapitole 5. Gravitačné pole). Tiaž $\boldsymbol{G}$, tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$ a tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$ majú rovnaký smer, pôsobisko tiaže je v ťažisku telesa. Z druhého pohybového zákona je vektor tiažovej sily a jej veľkosť definovaná vzťahom

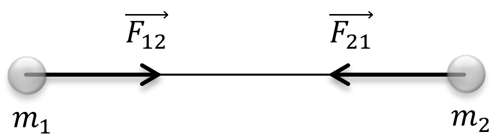
$$\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g} \qquad\qquad F_G = mg$$

Tretí Newtonov pohybový zákon – zákon akcie a reakcie:

Sily, ktorými navzájom na seba pôsobia dve telesá, sú rovnako veľké, ale opačne orientované. Tieto sily vznikajú a zanikajú súčasne.

Ak prvé teleso pôsobí na druhé silou $\boldsymbol{F}_{21}$ a druhé na prvé silou $\boldsymbol{F}_{12}$ rovnako veľkou a opačne orientovanou (obe sily ležia na jednej vektorovej priamke, obr. 4.1) potom sa to zapisuje v tvare

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$



Obr. 4.1. Grafické znázornenie silového pôsobenia

Jedna sila sa nazýva **akcia** a druhá **reakcia**, reakcia môže ovplyvniť pohybový stav telesa (hmotného bodu). Potom je možné definovať tretí Newtonov pohybový zákon aj v tvare: **Každá akcia vyvolá rovnako veľkú reakciu opačného smeru.** Je jedno, ktorá z týchto síl je akcia a ktorá reakcia, dôležité je, že každá zo síl pôsobí na iné teleso, a preto sa tieto sily vo svojich účinkoch nikdy nerušia. Napríklad, ak chcete udržať na dlani napr. jablko, musíte na jablko pôsobiť silou zvislo nahor, súčasne teleso pôsobí na ruku silou v smere zvislo nadol.

Pohybový účinok síl akcie a reakcie nemusí byť rovnaký. To znamená, že ak sa napríklad zrazí nákladné auto s hmotnosťou m_1 a osobné auto s hmotnosťou m_2 ($m_1 > m_2$), uvedie sila $\boldsymbol{F}_1$ auto s menšou hmotnosťou do pohybu s väčším zrýchlením ako sila $\boldsymbol{F}_2$, ktorá pôsobí na auto s väčšou hmotnosťou.

4.2. Hybnosť a impulz sily

Zotrvačnosť je vlastnosť telesa zachovávať si svoj pohybov stav, t. j. ostať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Mierou zotrvačnosti je zotrvačná hmotnosť, ktorá sa určuje z druhého pohybového zákona. Pohybový stav telesa vzhľadom na zvolenú vzťažnú sústavu je v kinematike vyjadrený rýchlosťou a v dynamike je vyjadrený jeho hybnosťou.

Hybnosť $\boldsymbol{p}$ je vektorová fyzikálna veličina vyjadrená súčinom hmotnosti m telesa a jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}$ v danom okamihu a je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

Jednotkou hybnosti je $\mathrm{kg.m.}s^{-1}$. Súčin hmotnosti m a veľkosti okamžitej rýchlosti v hmotného bodu sa nazýva veľkosť hybnosti $p = mv$.
Celková hybnosť sústavy hmotných bodov s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots, m_n$, ktoré sa pohybujú rýchlosťami $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ je určená vektorovým súčtom hybností jednotlivých hmotných bodov

$$\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{v}_n$$

Ak na teleso pôsobí sila $\boldsymbol{F}$, ktorá mu udeľuje zrýchlenie $\boldsymbol{a}$, tak aj rýchlosť telesa $\boldsymbol{v}$ sa zmení. Sila, ktorá je príčinou zmeny pohybového stavu telesa, môže pôsobiť trvalo alebo len určitý čas.

Impulz sily $\boldsymbol{I}$ je vektorová fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje časový účinok sily na teleso (keď sila pôsobí určitý čas na teleso, udeľuje mu impulz). Pre konštantnú silu je definovaný impulz sily

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t$$

Jednotka impulzu sily je $\mathrm{N.s}$, $1\ \mathrm{N.s} = 1\ \mathrm{kg.m.s}^{-1}$. Pre konečný časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, za ktorý pôsobí sila $\boldsymbol{F}$ na teleso vyjadruje impulz sily časovú zmenu hybnosti nasledovne

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t = m\boldsymbol{a}\Delta t = m\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta\boldsymbol{p}$$

kde $\Delta\boldsymbol{p}$ je zmena vektora hybnosti telesa, ktoré mení svoju rýchlosť z hodnoty $\boldsymbol{v}_1$ na hodnotu $\boldsymbol{v}_2$ pôsobením sily $\boldsymbol{F}$. Vyjadrením sily $\boldsymbol{F}$ zo vzťahu pre impulz sily dostávame druhý pohybový zákon v matematickom tvare, pre konštantnú silu

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

Zákon zachovania hybnosti:

V izolovanej sústave hmotných bodov je pri ich vzájomnom pôsobení celková hybnosť konštantná. Matematicky pre súčet vektorov hybností $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_n$ hmotných bodov platí

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_n = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{v}_n = konšt.$$

Máme dva hmotné body v izolovanej sústave s hmotnosťami m_1, m_2. Pobybové rovnice týchto bodov je možné vyjadriť z druhého Newtonovho zákona a hmotné body navzájom na seba pôsobia silami $\boldsymbol{F}_{12} = m_1\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{F}_{21} = m_2\boldsymbol{a}_2$. Pre súčet síl platí $m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21}$. Z tretieho Newtonovho zákona platí, že sily sú rovnako veľké, opačne orientované $\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{0}$ a po matematickej úprave platí

$$0 = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = m_1\frac{\Delta\boldsymbol{v}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\boldsymbol{v}_2}{\Delta t} = \frac{m_1\Delta\boldsymbol{v}_1 + m_2\Delta\boldsymbol{v}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

Zmena hybnosti je nulová a teda celková hybnosť sa s časom nemení, ostáva konštantná.

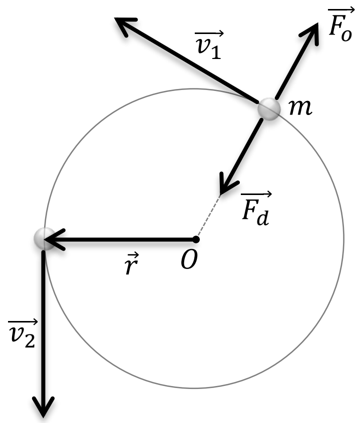
Zákon zachovania hybnosti sa využíva na vysvetlenie fungovania napríklad prúdových lietadiel, raketových motorov, často ho používame v riešení úloh o zrážkach telies. Pri riešení úloh sa používa zákon zachovania hybnosti v skalárnom tvare, pričom smery rýchlostí sú vyjadrené znamienkami.

4.3. Niektoré druhy síl

Dostredivá sila

Pri rovnomernom pohybe po kružnici dochádza ku zmene smeru rýchlosti a táto zmena vektora rýchlosti $\Delta\boldsymbol{v}$ vyvolá **dostredivé zrýchlenie $\boldsymbol{a}_d$**. Príčinou zrýchlenia je podľa druhého Nevtonovho pohybového zákona vždy sila. V prípade otáčavého pohybu hmotného bodu po kružnici je to **dostredivá sila $\boldsymbol{F}_d$,** orientovaná vždy do stredu kružnice (obr. 4.2).

Obr. 4.2. Grafické znázornenie dostredivej sily



Dostredivá sila $\boldsymbol{F}_d$ udáva telesu o hmotnosti m dostredivé zrýchlenie $\boldsymbol{a}_d$ (normálové zrýchlenie), pre ktorého veľkosť platí

$$a_d = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

kde r je polomer krivosti, v veľkosť rýchlosti a ω veľkosť uhlovej rýchlosti. Vektor dostredivého zrýchlenia je kolmý na vektor okamžitej rýchlosti, má smer do stredu trajektórie tvaru kružnice (obr. 4.2). Veľkosť sily je konštantná, t. j. aj veľkosť zrýchlenia je konštantná. Pre veľkosť dostredivej sily platí

$$F_d = ma_d = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

Dostredivá sila pôsobí na teleso prostredníctvom zariadení, ktorými je teleso viazané na kružnicovú dráhu. Ak na hmotný bod pri rovnomernom pohybe po kružnici pôsobí viac síl, dostredivá sila je ich výslednicou.

V neinerciálnej vzťažnej sústave, t. j. otáčajúcej sa sústave pôsobí na teleso **zotrvačná sila**, ktorú nazývame **odstredivá sila $\boldsymbol{F}_o$**. Je to sila, ktorou teleso pôsobí na zariadenia, ktoré ho nútia zotrvávať na kružnicovej dráhe. Zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_o = -m\boldsymbol{a}_d$ má opačný smer

ako dostredivá sila a nie je reakciou k žiadnej sile, pozorujeme ju iba v neinerciálnej vzťažnej sústave.
Napríklad, ak sa bude guľa otáčať na kružnicovej dráhe, prostredníctvom špagátu na ktorom je uviazaná, svojou zotrvačnosťou vyvinie guľa rovnako veľkú odstredivú silu a pôsobí ňou cez špagát na ruku alebo predmet, na ktorý je špagát upevnený ako je dostredivá sila, ktorou pôsobí ruka na guľu prostredníctvom špagátu. Pri vysokých rýchlostiach dosahuje veľkosť odstredivej sily veľké hodnoty a môže dôjsť k porušeniu pevnosti materiálov, napr. sa špagát pretrhne. V praxi môže odstredivá sila zapríčiniť napríklad šmyk automobilu, alebo jeho prevrátenie v zákrute vozovky, čo sa dá regulovať vhodným sklonom vozovky napr. Pozitívne účinky odstredivých síl sa využívajú napr. v odstredivkách na prádlo, centrifúgach na med.

Trecie sily

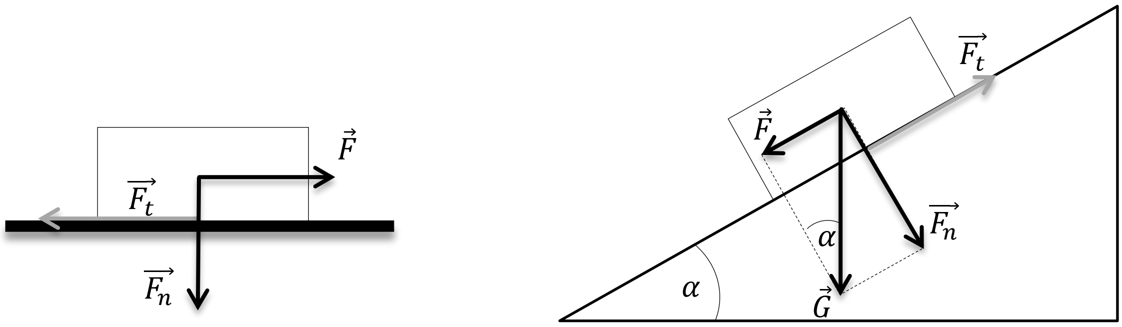
Pri vzájomnom dotyku telies, na dotykových plochách dvojice telies vzniká sila, ktorá je výslednicou pôsobenia elektromagnetických síl medzi molekulami a atómami povrchov obidvoch dotýkajúcich sa telies.

Trecia sila $\boldsymbol{F_t}$ je sila, ktorá vzniká v smere dotyčnice k dotykovej ploche dvoch telies, ktoré sú voči sebe v pohybe, alebo by sa pôsobením vonkajších síl mohli uviesť do vzájomného pohybu. Trecia sila pôsobí proti smeru pohybu telesa. Jav vznikajúci pri relatívnom pohybe navzájom dotýkajúcich sa telies sa nazýva **trenie**. Podľa druhu pohybu možno hovoriť o šmykovom a valivom trení. **Šmykové trenie** (klzné, vlečné) je fyzikálny jav, ktorý vzniká v dotykovej ploche dvoch telies pri posuvnom pohybe. **Normálová sila** $\boldsymbol{F_n}$ je tlaková sila kolmá na podložku, je to reakcia podložky, pôsobiaca na teleso položené na dotykovej ploche. Trecia a normálová sila nemôžu samostatne zmeniť pohybový stav telesa.

Veľkosť trecej sily F_t závisí od veľkosti normálovej sily F_n, ktorou sú telesá navzájom k sebe pritláčané a od vlastností povrchov dotykových plôch μ

$$F_t = \mu F_n$$

μ sa nazýva **súčiniteľ šmykového trenia** a je to bezrozmerná fyzikálna veličina. Trecia sila nezávisí od veľkosti plôch a pri malých rýchlostiach ani od rýchlosti. Trecia sila v pokoji (statická trecia sila) je väčšia ako trecia sila pri pohybe (dynamická trecia sila).



Obr. 4.3. Grafické znázornenie trecej sily pri pohybe telesa po vodorovnej a naklonenej rovine

Pri pohybe po naklonenej rovine, kde uhol naklonenia je α, nech na teleso pôsobí konštantná sila. Tiaž telesa $\boldsymbol{G}$ má vždy smer kolmo na povrch Zeme, je možné ju rozložiť na dve zložky, silu $\boldsymbol{F}_n$ kolmú na naklonenú rovinu a silu $\boldsymbol{F}$, rovnovežnú s naklonenou rovinou. Sila $\boldsymbol{F}_n$ je kompenzovaná silou, ktorou pôsobí podložka na teleso pri ich vzájomnom dotyku, zákon akcie a reakcie (obr. 4.3). Sila, ktorá je príčinou pohybu telesa a udáva telesu zrýchlenie je daná vektorovým súčtom hnacej sily $\boldsymbol{F}$ a trecej sily $\boldsymbol{F}_t$ a pre veľkosť tejto výslednice platí

$$F - F_t = ma$$

Veľkosť trecej sily $F_t = \mu F_n$ závisí od veľkosti normálovej sily $F_n = G\cos\alpha$, veľkosť sily F je rovná $F = G\sin\alpha$, potom po dosadení do predchádzajúcej rovnice možno napísať

$$G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha = ma$$

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$$

$$(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g = a$$

Pre určitý uhol α_t je zrýchlenie nulové, t. j. $\tan\alpha_t = \mu$, teleso je v pokoji. Teleso sa po až po udaní začiatočnej rýchlosti pohybuje rovnomerne zrýchlene so zrýchlení a.

Valivý odpor je pri rovnakých podmienkach menší ako šmykové trenie. Valivý odpor vzniká, ak sa pevné teleso s kruhovým prierezom valí po pevnej podložke. Veľkosť trecej sily pri valivom pohybe kolesa, valca s polomerom r je priamo úmerná normálovej sile F_n a nepriamo úmerná polomeru valca r

$$F_t = \frac{\mathrm{a}}{r}F_n = \mu_v F_n$$

veličina a je rameno valivého odporu, μ_v súčiniteľ valivého trenia.

Trenie môže byť prekážkou v pohybe, v tom prípade je snaha zmenšiť trenie, napríklad klzký ľad sa posýpa štrkom, alebo pieskom. Vo výrobe môže mať trenie aj pozitívny význam, napríklad prenos sily prostredníctvom remeňového prevodu je umožnené trením. Trenie je sprevádzané aj zahrievaním dotykových plôch, napríklad škodlivé trenie v ložiskách strojov sa znižuje mazivami a prevedením na valivé trenie guľovými alebo valčekovými ložiskami.

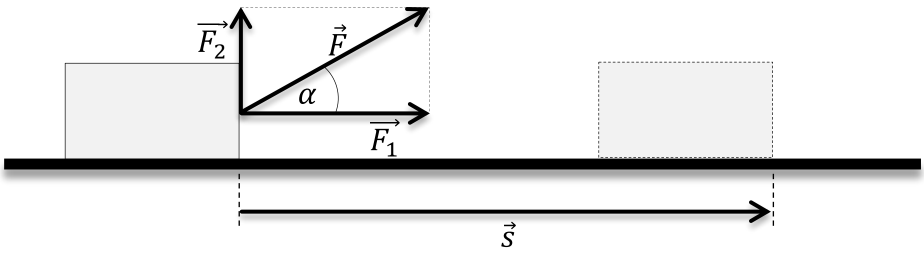
4.5. Mechanická práca, výkon a energia

Mechanická práca

Mechanická práca je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje **dráhový účinok sily**. Teleso koná mechanickú prácu, ak pôsobí silou na iné teleso a jej pôsobením sa teleso premiestňuje po nejakej trajektórii. **Mechanická práca** W vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ závisí od veľkosti sily F, ktorá pôsobí na teleso po dráhe s a od uhla α a je definovaná vzťahom

$$W = Fs\cos\alpha$$

Jednotkou mechanickej práce je joul (J), $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N.m} = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$. Prácu $1\,\mathrm{J}$ vykonáme pri premiestnení telesa pôsobením sily $1\,\mathrm{N}$ do vzdialenosti $1\,\mathrm{m}$ v smere posunutia. Práca je skalárna fyzikálna veličina charakterizovaná iba svojou veľkosťou.



Obr. 4.5. Znázornenie zložiek sily pre odvodenie práce

Konštantná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na teleso má dve zložky, sila $\boldsymbol{F}_1$ je zložka konštantnej sily do smeru posunutia, rovnobežná s posunutím telesa $\boldsymbol{s}$. Zložka sily $\boldsymbol{F}_1$ koná prácu a jej veľkosť je rovná $F_1 = F\cos\alpha$. Sila $\boldsymbol{F}_2$ je zložka sily $\boldsymbol{F}$ kolmá na smer posunutia $\boldsymbol{s}$ (obr. 4.5). Uhol α je uhol, ktorý zviera smer pôsobiacej konštantnej sily $\boldsymbol{F}$ so smerom posunutia, t. j. s trajektóriou telesa. Ak uhol $\alpha < 90°$, $\cos\alpha > 0$, práca je kladná, $W > 0\,\mathrm{J}$, tak zložka $\boldsymbol{F}_1$, respektíve teleso pôsobiace silou koná prácu. Ak $\alpha > 90°$, $\cos\alpha < 0$, $W < 0\,\mathrm{J}$, teleso, ktoré vyvíja silu vykonalo zápornú prácu, teda samo získalo prácu od telesa, na ktoré pôsobilo, t. j. prácu spotrebovalo. Pre uhlo $\alpha = 90°$ je $\cos\alpha = 0$, práca $W = 0\,\mathrm{J}$.

Keďže sila $\boldsymbol{F}$ aj posunutie $\boldsymbol{s}$ sú vektory, je možné zapísať prácu ako skalárny súčin dvoch vektorov a tento zápis je základnou definíciou práce sily

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{s}$$

Výkon P je skalárna fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje prácu W vykonanú za jednotku času t. Ak zariadenie za časový interval Δt vykoná prácu ΔW, jeho priemerný výkon je určený vzťahom

$$P_p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Jednotka výkonu je watt (W), $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J.s^{-1}} = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$. Zariadenie ma výkon $1\,\mathrm{W}$, ak vykoná prácu $1\,\mathrm{J}$ za čas $1\,\mathrm{s}$. V technickej praxi majú stroje a zariadenia udávaný výkon aj pomocou jednotiek wattsekunda (Ws, $1\,\mathrm{Ws} = 1\,\mathrm{J}$), watthodina ($\mathrm{Wh}$, $1\,\mathrm{Wh} = 3600\,\mathrm{J}$), kilowatthodina ($\mathrm{kWh}$, $1\,\mathrm{kWh} = 36\cdot 10^5\,\mathrm{J}$).

Pri určovaní výkonu ťažnej sily vozidiel alebo výťahov, ktoré sa pohybujú rovnomerne, keď je smer pôsobiacej sily $\boldsymbol{F}$ a smer rýchlosti $\boldsymbol{v}$ rovnaký, možno okamžitý výkon vyjadriť nasledovne

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F\Delta s}{\Delta t} = \frac{Fv\Delta t}{\Delta t} = Fv$$

alebo všeobecne prostredníctvom skalárneho súčinu vektora sily $\boldsymbol{F}$ a vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$

$$P = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}$$

Pomocou matematických pojmov limita a derivácia je definovaný okamžitý výkon vzťahmi

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Príkon P_r je fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje množstvo energie ΔE, ktorá sa dodáva zariadeniu za daný časový interval Δt. Podiel výkonu P a príkonu P_r pracujúcej sústavy, zariadenia vyjadruje fyzikálnu veličinu **účinnosť zariadenia** η, ktorá je definovaná vzťahom

$$\eta = \frac{P}{P_r}$$

$$\eta = \frac{P}{P_r}.100\ \%$$

Výsledkom určovania účinnosti je vždy číslo menšie ako jeden, pretože $P_r > P$. Spravidla sa účinnosť vyjadruje v percentách a $\eta < 100\ \%$.

Mechanická energia

Mechanická energia a mechanická práca sú rôzne fyzikálne veličiny. Mechanická práca charakterizuje fyzikálny dej, pri ktorom sa mení pohybový stav telies. **Mechanická energia** je skalárna fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje pohybový stav telies a vzájomné silové pôsobenie telies. Teleso má vzhľadom k zvolenej vzťažnej sústave súčasne potenciálnu aj kinetickú energiu, ktorých súčet definuje celkovú mechanickú energiu.

Potenciálna (polohová) energia E_p je skalárna fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje vzájomné pôsobenie telies. Hodnota potenciálnej energie závisí od vzájomnej polohy telies, alebo ich jednotlivých častí. Určená je vzhľadom na ľubovoľne zvolenú vodorovnú rovinu, t. j. hladinu potenciálnej energie, napr. povrch Zeme. Ak m je hmotnosť telesa, h je výška telesa od zvolenej vodorovnej roviny, potom je potenciálna energia je definovaná vzťahom

$$E_p = mgh$$

Jednotkou potenciálnej energie je joule (J).

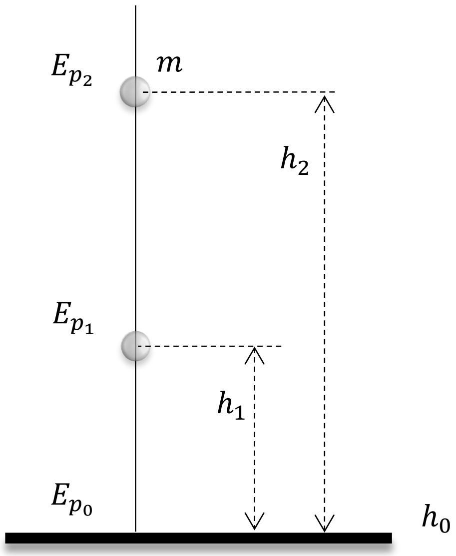
Nech teleso položené na povrchu Zeme má nulovú potenciálnu energiu vzhľadom na zem, t. j. $h_0 = 0\ \mathrm{m}$, $E_{p_0} = 0\ \mathrm{J}$. Na premiestnenie telesa s hmotnosťou m z výšky h_1 do výšky h_2 ($h_1 < h_2$) je potrebné vykonať prácu premáhaním tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$, pritom teleso získa **tiažovú potenciálnu energiu** s rovnakou veľkosťou ako je vykonaná mechanická práca

$$W = F_G(h_2 - h_1) = mg(h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 = E_{p_2} - E_{p_1} = \Delta E_p$$

Nech tiažová sila, napríklad pri páde telesa, z výšky h_2 premiestni teleso z hladiny potenciálnej energie $E_{p_2} = mgh_2$ na hladinu s potenciálnou energiou $E_{p_1} = mgh_1$. Práca tiažovej sily sa rovná rozdielu potenciálnej energie medzi zvolenými polohami $h_2,\ h_1$, medzi ktorými sa teleso premiestňuje

$$W = F_G(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 = E_{p_1} - E_{p_2} = -\Delta E_p$$

Mechanická práca tiažovej sily je rovná poklesu potenciálnej energie telesa, možno povedať, že teleso má schopnosť konať prácu, lebo sa na začiatku pádu nachádzalo vo výške h_2 (obr. 4.6).



Obr. 4.6. Poloha telesa a jeho potenciálna energia

Zmena potenciálnej energie, práca tiažovej sily závisí od začiatočnej a konečnej polohy telesa, v ktorých sa teleso nachádza a nezávisí od trajektórie, ktorú teleso pri zmene polohy opíše, ani od dráhy, ktorú prejde. Všetky polohy s rovnakou výškou majú rovnakú potenciálnu energiu a tieto polohy tvoria rovinu rovnobežnú s povrchom Zeme s názvom **ekvipotenciálna rovina** (plocha).

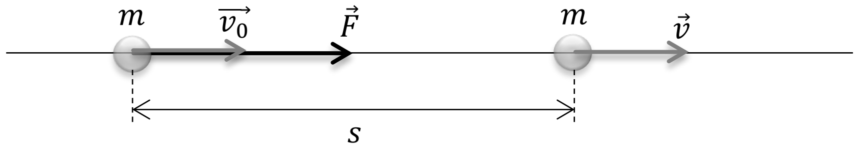
Iný druh potenciálnej energie má napríklad natiahnutá alebo stlačená pružina, stlačený plyn, a i. Pri natiahnutí pružiny vonkajšia sila vykoná prácu, ktorá sa získa naspäť uvoľnením pružiny. To sa rovná potenciálnej energii pružnosti $E_p = W$. Potenciálna energia pružnosti súvisí so vzájomnou polohou častí pružiny a je určená pružnosťou pružiny, pôsobia tam sily pružnosti. **Potenciálna energia pružnosti** je definovaná vzťahom

$$E_p = \frac{1}{2} k y^2$$

kde k je tuhosť pružiny vyjadrujúca elastické vlastnosti pružiny a y je stlačenie, alebo predĺženie pružiny.

Kinetická (pohybová) energia E_k je skalárna fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje pohybový stav telies. Je to relatívna fyzikálna veličina, pretože rýchlosť telesa sa určuje vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu, ktorá je v pokoji napr. voči povrchu Zeme.

Obr. 4.7. Znázornenie pohybu telesa pre odvodenie kinetickej energie



Nech na teleso s hmotnosťou m, ktoré sa pohybuje začiatočnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$, na začiatku merania času pôsobí konštantná sila $\boldsymbol{F}$. Podľa druhého Newtonovho zákona sa bude teleso pohybovať účinkom tejto sily so zrýchlením $\boldsymbol{a}$ (obr. 4.7). Teleso bude konať rovnomerne zrýchlený pohyb a za čas t od začiatku merania času, nadobudne rýchlosť $v = v_0 + at$ a teleso prejde dráhu $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Práca W, ktorú konštantná sila $\boldsymbol{F}$ vykoná je rovná $W = Fs$. Použitím druhého Newtonovho pohybového zákona $F = ma$ a vzťahov popisujúcich rýchlosť a dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, ktorý teleso účinkom konštantnej sily koná, je práca vyjadrená nasledovne

$$W = Fs = ma\left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right) = \frac{1}{2}m(2v_0 at + a^2t^2) = \frac{1}{2}m(v^2 - {v_0}^2) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

Práca výslednej vonkajšej sily pôsobiacej na teleso je rovná prírastku jeho kinetickej energie $W = \Delta E_k = E_k - E_{k_0}$, kde $E_{k_0} = \frac{1}{2}m{v_0}^2$ je kinetická energia na začiatku a $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ na konci pôsobenia konštantnej sily na teleso. Ak je pozorovaná zmena pohybového stavu telesa, výsledná sila pôsobiaca na teleso koná prácu. Kinetická energia telesa, hmotného bodu je schopnosť pohybujúceho sa telesa konať prácu.

Kinetická energia E_k telesa s hmotnosťou m, ktoré sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ je definovaná vťahom

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Jednotkou kinetickej energie je joul (J). Tento vzťah platí pre okamžitú hodnotu kinetickej energie pri ľubovoľnom aj krivočiarom nerovnomernom pohybe a je možné ho aplikovať na telesá konečných rozmerov, ak hmotný bod koná translačný pohyb a súčasne nekoná rotačný pohyb. Pre sústavu hmotných bodov s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots, m_n$ pohybujúcich sa rýchlosťami $v_1, v_2, \dots, v_n$ je celková kinetická energia definovaná súčtom kinetických energií jednotlivých hmotných bodov

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n v_n^2$$

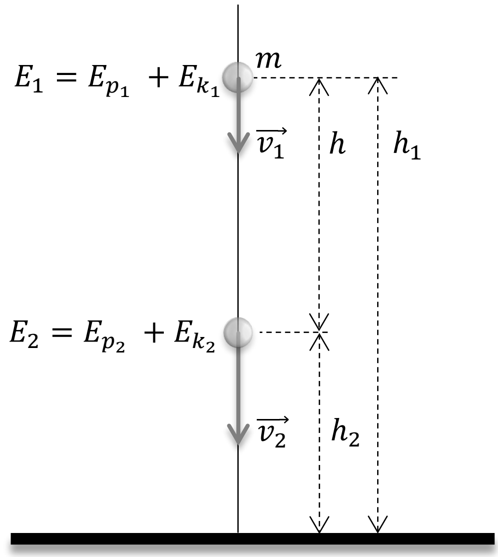
Takúto sústavu tvoria napríklad telesá slnečnej sústavy, alebo biliardové gule na biliarde.

Zákon zachovania mechanickej energie

Celková **mechanická energia** telesa, sústavy telies, je definovaná súčtom potenciálnej a kinetickej energie

$$E = E_p + E_k$$

Nech sa teleso s hmotnosťou m nachádza vo výške h_1 nad povrchom Zeme, teleso má voči povrchu potenciálnu energiu $E_p = mgh_1$, vo výške h_2 potenciálnu energiu $E_p = mgh_2$. Ak teleso padá na Zem pôsobením tiažovej sily $\boldsymbol{F_G}$ jeho potenciálna energia sa znižuje a súčasne narastá veľkosť jeho rýchlosti, to znamená, že sa zvyšuje jeho kinetická energia. Vo výške h_1 má teleso rýchlosť v_1 vo zvislom smere a jeho kinetická energia je $E_k = \frac{1}{2}m{v_1}^2$, vo výške h_2 kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2}m{v_2}^2$ (obr. 4.8).



Obr. 4.8. Znázornenie pohybu telesa pre odvodenie zákona zachovania energie

Celková mechanická energia telesa vo výške h_1 je $E_1 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + mgh_1$. Po prejdení dráhy $h = v_1 t + \frac{1}{2}gt^2$, nadobudne teleso rýchlosť $v_2 = v_1 + gt$ a v danej polohe má celkovú mechanickú energiu rovnú $E_2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + mgh_2$, pre ktorú platí

$$E_2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 + mg(h_1 - h) = \frac{1}{2}m(v_1 + gt)^2 + mg\left(h_1 - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m(gt)^2 + mv_1 gt + mgh_1 - mgv_1 t - \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = E_1$$

Celková mechanická energia pozdĺž celej trajektórie pohybujúceho sa telesa sa nezmenila. Potenciálna energia sa mení na kinetickú energiu, na teleso pritom pôsobí iba tiažová sila. V izolovanej sústave telies platí **zákon zachovania mechanickej energie**:

V izolovanej sústave je súčet kinetickej a potenciálnej energie telesa v danom okamihu konštantný a rovný celkovej mechanickej energii telesa.

$$E = E_k + E_p = konšt.$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = konšt.$$

Pri voľnom páde telesa sa práca tiažovej sily rovná prírastku kinetickej energie telesa $W = E_{k_2} - E_{k_1}$ a súčasne sa rovná poklesu potenciálnej energie telesa $W = E_{p_1} - E_{p_2}$. Nárast kinetickej energie je rovný poklesu potenciálnej energie $E_{k_2} - E_{k_1} = E_{p_1} - E_{p_2}$, z tejto rovnosti platí pre celkovú mechanickú energiu na začiatku a konci pohybu $E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$. Tento výsledok tiež potvrdil vyššie popísaný zákon zachovania celkovej mechanickej energie v izolovanej sústave. Zákon zachovania mechanickej energie platí v izolovanej sústave bez trenia, deformácie telies a zákon zachovania hybnosti platí v každej sústave, v ktorej dochádza aj ku treniu či deformácii telesa. Tento poznatok je veľmi dôležitý pri písaní rovníc potrebných pri riešení fyzikálnych úloh.

Celková mechanická energia je mierou zmeny mechanickej práce. Napríklad sila vodného prúdu, sila vetra sa dá vhodne použiť na vykonávanie práce. Schopnosť látok, telies konať prácu sa nazýva energia. Energia charakterizuje stav sústavy telies a zmena stavu sústavy je spravidla sprevádzaná zmenou jej energie. Prúd vody ženie turbínu, mení sa jeho rýchlosť a koná prácu na úkor jeho pohybovej energie. V elektromotore sa na mechanickú prácu mení elektrická energia, atď.

Keď sa mechanická energia mení vplyvom trenia na teplo, alebo pri deformácii telies na deformačnú energiu, pri plastickej deformácii aj na teplo, tak celková mechanická energia izolovanej sústavy klesá. Neklesá ale celková energia sústavy, ktorá je definovaná ako súčet všetkých foriem energie (napríklad mechanickej, elektrickej, tepelnej, deformačnej, chemickej). Platí **zákon zachovania celkovej energie**, ktorý má všeobecnú platnosť a je jedným zo základných zákonov nášho sveta:

V izolovanej sústave sa celková energia sústavy zachováva.

V izolovanej sústave je súčet všetkých foriem energie vždy konštantný. Rôzne procesy v tejto sústave sú spojené so zmenami jedných foriem energie na ekvivalentné množstvá iných foriem energie tak, že celková energia sústavy sa vždy zachováva.

Úlohy ku kapitole 4

1. Dvaja chlapci majú tiaž 1300 N. Hmotnosť prvého je o 10 kg väčšia ako hmotnosť druhého. Aká je hmotnosť ťažšieho z nich? *[m = 71,26* kg*]*
2. Určte hmotnosť telesa, ak konštantná sila F = 16 N udeľuje telesu zrýchlenie a = 0,4 m.s^{-2}. *[m = 40* kg*]*
3. Loptu s hmotnosťou 300 g sme nárazom uviedli do pohybu s rýchlosťou 24 m.s^{-1}. Akou priemernou silou sme do nej udreli, keď náraz trval 0,01 s? *[F = 720* N*]*
4. Nákladné auto s hmotnosťou m = 3,6 t sa pohybuje rýchlosťou v_0 = 72 km.h^{-1}. Aká je jeho priemerná brzdná sila, ak zastaví za čas t = 10 s? *[F = 7200* N*]*
5. Motor automobilu s tiažou G = 10 000 N má ťažnú silu F = 1600 N. Ako dlho trvá automobilu zo stavu pokoja dosiahnuť rýchlosť v = 54 km.h^{-1}? Odpor vzduchu a trenie zanedbajte. *[t = 9,6* s*]*
6. Električka sa pohybuje po vodorovnom úseku koľajníc rýchlosťou v = 36 km.h^{-1}. Aký čas potrebuje na zabrzdenie a akú dráhu prejde až do zastavenia, keď brzdná sila $F = ¼\, G$, kde G je tiaž električky? *[t = 4,08* s*; s = 20,39* m*]*
7. Chlapec odkopol loptu s hmotnosťou 110 g rýchlosťou 12 m.s^{-1}. Akou konštantnou silou do lopty narazil, ak úder trval 0,01 s? *[F = 132* N*]*
8. Beizbalová loptička s hmotnosťou 140 g narazila kolmo na zvislú stenu rýchlosťou 20 m.s^{-1} a odrazila sa od nej rýchlosťou 15 m.s^{-1}. Určte hybnosť loptičky pred nárazom, po náraze a veľkosť priemernej sily, ktorou loptička pôsobila na stenu, ak náraz trval 0,05 s. *[p_{pred} = 2,8* kg.m.s^{-1}*; p_{po} = 2,1* kg.m.s^{-1}*; F = 98* N*]*
9. Pod uhlom 30° vzhľadom na vodorovnú podložku dopadla guľôčka s hmotnosťou m = 7 g rýchlosťou v = 400 m.s^{-1}. Vypočítajte impulz sily, ktorý udelí stena pružnej guľôčke. Predpokladajte, že stena je dokonale hladká. *[I = 2,8* kg.m.s^{-1}*]*
10. Osobný výťah sa rozbieha v smere zvislo nahor zrýchlením 1,3 m.s^{-2}. Určte veľkosť tlakovej sily, ktorou pôsobí človek s hmotnosťou 95 kg na podlahu výťahu. *[F_T = 1055,45* N*]*
11. Kabína osobného výťahu s celkovou hmotnosťou m = 1600 kg sa rozbieha z prízemia smerom nahor a má dosiahnuť rýchlosť v = 12 m.s^{-1} za t = 5 s. Určte, aké zaťaženie musí vydržať lano kabíny výťahu. *[F = 19 536* N*]*
12. Náklad s hmotnosťou 195 kg chcete dopraviť do výšky 9 m za 5 s. Prvú polovicu dráhy sa náklad pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom, v druhej polovici dráhy rovnomerne spomaleným pohybom s konštantnou veľkosťou zrýchlenia a rýchlosť na konci pohybu je nulová. Urče veľkosť síl pôsobiacich pri pohybe počas prvej a druhej polovice dráhy. *[F_1 = 2193,75* N*; F_2 = 1632,15* N*]*

13. Skriňové vozidlo s celkovou hmotnosťou m = 4700 kg prechádza po oblúkovom moste s polomerom krivosti r = 0,06 km rýchlosťou v = 45 km.h^{-1}. Určte veľkosť sily F, ktorou pôsobí auto na most v momente, keď auto prechádza stredom mosta. *[F = 33 900* N*]*

14. Nesieme vo vedre vodu. S akou minimálnou frekvenciou by sme mali otáčať rukou s vedrom vo vertikálnej rovine, aby sa voda nevyliala z vedra? Uvažujeme, že dĺžka ruky je 0,55 m. *[f = 0,67* s^{-1}*]*

15. Chlapec s hmotnosťou 55 kg sedí na sedadle kolotoča, ktorý sa otáča tak, že reťaz sedadla je vychýlená od zvislého smeru o 45°. Aká veľká odstredivá sila pôsobí na chlapca? *[F_d = 539,55* N*]*

16. Človek s hmotnosťou 75 kg sa pohybuje rýchlosťou 50 m.s^{-1} po zvislej kružnicovej dráhe s polomerom 100 m. Akou veľkou silou je človek pritláčaný k sedadlu v najnižšom a v najvyššom bode kružnicovej dráhy?
[v najnižšom bode F = 2610,75 N*, v najvyššom bode F = 1139,25* N*]*

17. Vypočítajte veľkosť rýchlosti motocyklistu v zákrute s polomerom krivosti r = 53 m, keď motocykel s jazcom má hmotnosť m = 185 kg, veľkosť odstredivej sily F = 1850 N.
[v = 23 m.s^{-1}*]*

18. Na tréning kozmonautov sa používa malá centrifúga s polomerom otáčania r_m = 7 m a veľká s polomerom otáčania r_v = 18 m. Vypočítajte veľkosť tlakovej sily, ktorou pôsobí kozmonaut s hmotnosťou 70 kg na operadlo kresla, ak malá centrifúga dosiahne frekvenciu otáčok 36 min^{-1}. *[F_m = 6964* N*]*

19. Pri centrálnej priamej zrážke dvoch gúľ sa hybnosť prvej gule zmenšila o 10 kg.m.s^{-1} a po zrážke sa pohybovala v rovnakom smere ako pred zrážkou. Akou rýchlosťou sa po zrážke pohybovala druhá guľa, ktorá mala hmotnosť 1 kg, ak na začiatku bola v pokoji?
[v_2 = 10 m.s^{-1}*]*

20. Vozík sa pohybuje rýchlosťou 3 m.s^{-1}, má hmotnosť 20 kg a stojí na ňom chlapec s hmotnosťou 55 kg. V určitom okamihu chlapec vrhá kameň s hmotnosťou 0,8 kg pod elevačným uhlom 35° v smere pohybu vozíka rýchlosťou 12 m.s^{-1} vzhľadom na Zem. Akým smerom a akou rýchlosťou sa bude pohybovať vozík? Trenie a odpor vzduchu zanedbajte. *[v pôvodnom smere; v = 2,9* m.s^{-1}*]*

21. Do akej výšky sa vychýli balistické kyvadlo hmotnosti 10 kg, keď v ňom uviazne strela hmotnosti 0,1 kg letiaca rýchlosťou 200 m.s^{-1}? *[h = 0,2* m*]*

22. Akou rýchlosťou sa dá do pohybu strelec stojaci na dokonale hladkom ľade po výstrele z pušky, keď hmotnosť strelca s puškou a výstrojou je 70 kg, hmotnosť strely je 0,01 kg a rýchlosť strely, ktorou opúšťa hlaveň je 700 m.s^{-1}. *[v = 0,1* m.s^{-1}*]*

23. Teleso s hmotnosťou m_1 = 5 kg narazí do nepohybujúceho sa telesa s hmotnosťou m_2 = 2,5 kg, ktoré sa po zrážke začne pohybovať s kinetickou energiou 5 J. Určte, akú

kinetickú energiu malo prvé teleso pred a po zrážke. Zrážka telies bola centrálna a absolútne pružná. *[E_{kpred} = 5,625 J; E_{kpo} = 0,625 J]*

24. Voz s pieskom o hmotnosti 100 kg sa pohybuje priamočiarym pohybom po vodorovnej trati s konštantnou rýchlosťou 1m.s^{-1}. Oproti vozu letí guľa hmotnosti 2 kg rýchlosťou 75 m.s^{-1}, ktorá sa pri zrážke s vozom zaryje do piesku. Akou veľkou rýchlosťou sa bude pohybovať voz so zarytou guľou v piesku a akým smerom sa bude voz pohybovať?
[v smere letu gule; v = 0,49 m.s^{-1}]

25. Elektrický rušeň pôsobí na vlak pri rozbiehaní po vodorovnej trati ťažnou silou 300 kN. Vlak sa rozbieha rovnomerne zrýchleným pohybom a za 2 minúty dosiahne rýchlosť 72 km.h^{-1}. Akú veľkú prácu vykoná rušeň? Trenie a odpor vzduchu zanedbajte!
[W = 360 MJ]

26. Akú mechanickú prácu vykoná človek, ktorý z prízemia vyjde po schodoch na tretie poschodie a vráti sa späť? Trenie a odpor vzduchu zanedbajte. *[W = 0 J]*

27. Auto značky Fiat 500 s hmotnosťou 980 kg zväčšilo svoju rýchlosť z nulovej hodnoty na hodnotu 72 km.h^{-1} po prejdení priamočiarej dráhy 100 m. Vypočítajte priemernú silu, ktorú pritom vyvinul motor auta. Trenie a odpor vzduchu zanedbajte.
[F = 1960 N]

28. Čerpadlo načerpá 0,4 m^3 vody za 60 sekúnd zo studne hlbokej 15 m. Vypočítajte výkon vodného čerpadla. Hustota vody ρ = 10^3 kg.m^{-3}. *[P = 981 W]*

29. Elektromotor žeriavu má príkon 9 kW, účinnosť celého zariadenia je 65,4 %. Aký je minimálny čas, za ktorý zdvihne žeriav bremeno s hmotnosťou 12 000 kg do výšky 9 m?
[t = 180 s]

30. Hmotnosť výťahu s nákladom je 800 kg. Nech výťah rovnomerným pohybom vydvihne tento náklad do výšky 28 m za čas 10 s. Určte príkon elektromotora, ktorý poháňa výťah, ak je účinnosť celého zariadenia 94 %. *[P = 23,4.10^3 W]*

31. Polomer remenice elektromotora je 40 mm, motor vykonáva 1560 otáčok za minútu a remenica elektromotora prenáša pomocou remeňa ťahovú silu 170 N. Aký je výkon elektromotora? *[P = 1111 W]*

32. Vypočítajte účinnosť Peltonovej turbíny, ktorá je poháňaná 22,5 m^3 vody za sekundu pri spáde 90 m, ak je výkon turbíny 1,9.10^6 W. *[η = 95,64 %]*

33. Určte prácu tiažovej sily pri páde telesa z výšky 15 m. Hmotnosť telesa je 2 kg.
[W = 294,3 J]

34. Vysokorýchlostný vlak Velaro má hmotnosť 478 t a rozbieha sa so zrýchlením 8 m.s^{-2}. Aká bude jeho kinetická energia po dvoch sekundách pohybu? *[E_k = 61 184 MJ]*

35. Pri zatĺkaní klinca do dosky udrie kladivo s hmotnosťou 1,5 kg na klinec rýchlosťou 5 m.s^{-1}, pritom klinec vnikne do hĺbky 3,5 cm. Určte, aká bola priemerná sila úderu.
[F = 536 N]

36. Hmotnosť automobilu Mercedes-Benz spolu s motorom je 1970 kg. Ak dosiahne rýchlosť 100 km.h^{-1}, aká bude jeho kinetická energia? *[E_k = 76.10^4 J]*

37. Automobil škoda Kodiaq má celkovú hmotnosť 2361 kg. Vypočítajte, aká priemerná brzdná sila pôsobí pri brzdení a akú dráhu prejde do zastavenia, ak má auto rýchlosť 100 km.h^{-1} a zabrzdí za čas 8,6 s. *[F = 7626 N; s = 119,4 m]*

38. Určte, akú prácu vykoná motor auta s hmotnosťou 1,1.10^3 kg pri zmene jeho rýchlosti z hodnoty 72 km.h^{-1} na 108 km.h^{-1}. *[W = 2,75.10^5 J]*

39. Strela s hmotnosťou 8 g prerazí rýchlosťou 400 m.s^{-1} drevené brvno hrúbky 20 cm a vyletí z neho rýchlosťou 100 m.s^{-1}. Vypočítajte veľkosť priemernej brzdnej sily, ktorou strela pôsobila na drevené brvno. *[F = 3 kN]*

40. Z výšky 90 cm nad povrchom je zvislo nadol vrhnutá guľôčka s hmotnosťou 20 g začiatočnou rýchlosťou 2,5 m.s^{-1}. Ak predpokladáme, že guľôčka aj povrch sú dokonale pružné, do akej výšky vyskočí guľôčka po odraze? *[h = 1,22 m]*

41. Strela s hmotnosťou 10 g pri výstrele z pušky nadobudne kinetickú energiu 1800 J. Akú kinetickú energiu má puška v dôsledku spätného úderu, ak hmotnosť pušky je 6 kg? *[E_k = 3 J]*

42. Teleso hmotnosti 0,8 kg je vyhodené smerom zvislo nahor. Pri svojom pohybe má vo výške 10 m kinetickú energiu 196,2 J. Akú maximálnu výšku teleso pri tomto pohybe dosiahne? *[h_{max} = 35 m]*

43. Volejbalovú loptu s hmotnosťou m = 0,26 kg vrhneme v smere zvislo nahor. Vo výške h = 10 m má lopta kinetickú energiu E_k = 12 J. Vypočítajte, akou veľkou začiatočnou rýchlosťou sme loptu vrhali. Odpor prostredia zanedbajte. *[v_0 = 16,98 m.s^{-1}]*

44. Vypočítajte tuhosť nárazníkovej pružiny železničného vagóna, ak na stračenie pružiny o 1 cm je potrená sila 4.10^4 N. Určte veľkosť práce potrebnej na stlačenie tejto pružiny o 4 cm. *[k = 4.10^6 N.m^{-1}; W = 3,2 kJ]*

45. Osobný automobil VW Passat s hmotnosťou 2100 kg sa rozbieha rovnomerne zrýchleným pohybom a po prejdení prvých 100 m má kinetickú energiu 75.10^4 J. Určte zrýchlenie a rýchlosť automobilu po prejdení uvedenej dráhy. Trenie a odpor prostredia zanedbajte. *[a = 3,6 m.s^{-2}; v = 26,7 m.s^{-1}]*

46. Určte hmotnosť automobilu, ak sa pohybuje po vodorovnej ceste rýchlosťou 50 km.h^{-1} pri výkone motora 7 kW? Koeficient šmykového trenia je 0,07. *[m = 733,94 kg]*

47. Teleso sa kĺže po naklonenej rovine s uhlom sklonu $\alpha = 70°$ a za čas $t = 1{,}4$ s prejde naklonenú rovinu s dĺžkou $s = 7$ m. Vypočítajte súčiniteľ šmykového trenia medzi naklonenou rovinou a telesom. *[μ = 0,62]*

48. Bremeno s hmotnosťou 450 kg je premiestnené rovnomerným pohybom nahor po naklonenej rovine s uhlom sklonu 30°. Aká veľká mechanická práca sa vykoná pri premiestnení telesa po dráhe 15 m, ak koeficient šmykového trenia je 0,5?

[*W = 61 781,77* J]

49. Začiatočná rýchlosť automobilu je v_0 = 108 km.h^{-1} a je potrebné ho zastaviť rovnomerným brzdením po vodorovnej ceste tak, aby nedošlo ku kĺzaniu kolies auta. Na akej dlhej brzdnej dráhe je možné zabrzdiť všetkými štyrmi kolesami za najkratší čas? Súčiniteľ šmykového trenia je μ = 0,8. [*s = 57,34* m]

50. Vypočítajte veľkosť ťažnej sily, ktorú musí vyvinúť lokomotíva vlaku, aby vlak nadobudol za čas 1 minúty z pokoja rýchlosť 72 km.h^{-1}. Hmotnosť vlaku je 3.10^5 kg, súčiniteľ šmykového trenia je 0,02, odpor prostredia zanedajte. [*F = 158,86.10^3* N]

51. Aký by mal byť najmenší súčiniteľ šmykového trenia medzi vozovkou a pneumatikou automobilu, aby auto prešlo rýchlosťou 120 km.h^{-1} zákrutou bez šmyku? Polomer zákruty je 245 m. [$\mu \geq 0,46$]

52. Akú konečnú rýchlosť dosiahne lyžiar po prejení zjazdovej dráhy Hrebienok - Dolná lúka dlhej 350 m, pri prekonaní výškového rozdielu 45 m? Súčiniteľ šmykového trenia je 0,05 a odpor vzduchu zanedbajte. [*v = 23,28* m.s^{-1}]

53. Nákladné auto, sklápač TATRA, s celkovou hmotnosťou 22 t prekonáva pri svojej jazde stúpanie 9 ‰ pri konštantnom výkone motora 206 kW. Vypočítajte, akou maximálnou rýchlosťou môže ísť nákladné auto. Súčiniteľ šmykového trenia je 0,01 a odpor vzduchu zanedbajte. [v_{max} *= 50,04* m.s^{-1}]

54. Tiaž auta je 9810 N. Auto sa pohybuje po priamej vodorovnej ceste a počas jeho pohybu pôsobí v protismere trecia sila rovná desatine taži auta. Určte veľkosť ťažnej sily motora auta, ak sa auto pohybuje
a) rovnomerne,
b) rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením 1,9 m.s^{-2}.

[*a) F = 1/10 G; b) F = 2881* N]

55. Akú veľkú prácu vykonáte, ak odtiahnete teleso s hmotnosťou 70 kg do vzdialenosti 5 m po vodorovnej podložke a ťaháte ho za povraz, ktorý zviera s vodorovnou podložkou uhol 27°? Súčiniteľ šmykového trenia je 0,3. [*W = 893,48* J]

5. Gravitačné pole

Gravitačné pole sprostredkováva silové pôsobenie medzi telesami aj bez vzájomného dotyku. Gravitačné pole ako každé iné pole je formou hmoty a zdrojom gravitačného poľa sú hmotné objekty.
Svoje gravitačné pole má Slnko, Mesiac, Zem ale aj všetky telesá na povrchu Zeme, t. j. okolo každého telesa existuje gravitačné pole, ktoré sa prejavuje silovými účinkami na iné telesá. Silové pôsobenie medzi telesami prostredníctvom gravitačného poľa je vzájomné. Podľa tretieho Newtonovho pohybového zákona sa rovnako veľkými, navzájom opačne orientovanými silami priťahuje napríklad Zem a Mesiac, Slnko a Zem, Zem a akékoľvek teleso na Zemi, pričom pre jednotlivé dvojice telies sú veľkosti síl rôzne.
Vzájomné silové pôsobenie prostredníctvom gravitačného poľa je univerzálna vlastnosť všetkých telies a nazýva sa **gravitačná interakcia** a vzájomné príťažlivé **gravitačné sily** sú mierou tejto interakcie. **Gravitácia** je fyzikálny jav, pri ktorom sa prejavujú gravitačné sily.

Pohyb planét v centrálnom gravitačnom poli Slnka popisujú **Keplerove zákony**.

Prvý Keplerov zákon: Planéty sa pohybujú po eliptických dráhach málo odlišných od kružníc, v ich spoločnom ohnisku je Slnko.
Druhý Keplerov zákon: Plochy opísané sprievodičom planéty a Slnka za jednotku času sú konštantné.
Tretí Keplerov zákon: Pomer druhých mocnín obežných dôb T_1, T_2 dvoch ľubovoľných planét sa rovná pomeru tretích mocnín hlavných poloosí a_1, a_2 ich trajektórií

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

5.1. Newtonov gravitačný zákon

Na základe pozorovania pohybu Mesiaca okolo Zeme a pohybu planét okolo Slnka Isaac Newton vyjadril zákon, ktorý objasňuje vlastnosti gravitačných síl.

Newtonov gravitačný zákon:

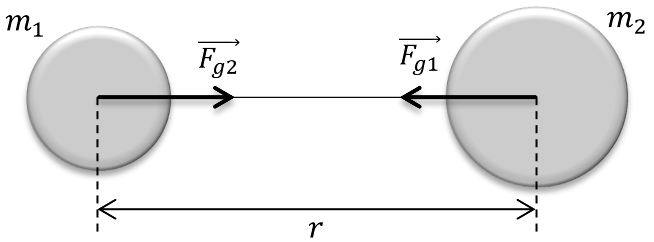
Každé dva hmotné body sa navzájom priťahujú rovnako veľkými gravitačnými silami $F_g = |\boldsymbol{F}_{g1}| = |\boldsymbol{F}_{g2}|$, **navzájom opačného smeru** $\boldsymbol{F}_{g1} = -\boldsymbol{F}_{g2}$. **Veľkosť gravitačnej sily** F_g **je priamo úmerná súčinu hmotností** m_1, m_2 **hmotných bodov a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti** r

$$F_g = \kappa \frac{m_1 \ m_2}{r^2}$$

κ je univerzálna gravitačná konštanta, $\kappa = 6{,}6720.10^{-11} \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$. Pre vektor gravitačnej sily platí

$$\boldsymbol{F}_{g1} = -\kappa \frac{m_1\ m_2}{r^3} \boldsymbol{r}_1$$

kde $\boldsymbol{r}_1$ je polohový vektor hmotného bodu s hmotnosťou m_2 vzhľadom na hmotný bod s hmotnosťou m_1.



Obr. 5.1. Vzájomné silové pôsobenie dvoch hmotných bodov

Newtonov gravitačný zákon platí pre dva hmotné body, pre dve telesá, ktoré nemôžeme považovať za hmotné body, aj pre dve homogénne gule, ktorých hmotné stredy sú vo vzdialenosti r (obr. 5.1).

5.2. Intenzita a potenciál gravitačného poľa

Intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ je vektorová fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje silové pôsobenie gravitačného poľa v jeho rôznych miestach.

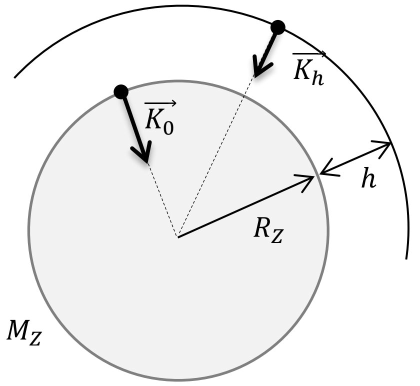
Intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ je vektorová fyzikálna veličina. V danom mieste poľa je definovaná podielom gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$, ktorá v tomto mieste na hmotný bod pôsobí, a hmotnosti m tohto bodu

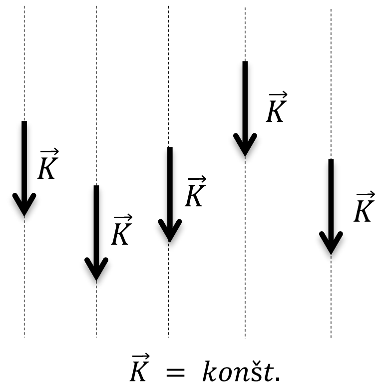
$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}_g}{m}$$

Jednotka intenzity gravitačného poľa je $\mathrm{N.kg^{-1}}$, $1\,\mathrm{N.kg^{-1}} = 1\,\mathrm{m.s^{-2}}$. Vektor intenzity gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ má rovnaký smer ako vektor gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$, ktorá pôsobí na hmotný bod v danom mieste poľa. Ak je hmotný bod s hmotnosťou m vo vzdialenosti $r \geq R$ od stredu gule s hmotnosťou M a polomerom R, pôsobí naň guľa gravitačnou silou veľkosti $F_g = \kappa \frac{mM}{r^2}$. Po dosadení sily do definičného vzťahu, pre veľkosť intenzity poľa dostaneme

$$K = \kappa \frac{M}{r^2}$$

Veľkosť intenzity K v danom mieste gravitačného poľa závisí iba na hmotnosti M telesa, ktoré pole vytvára, na vzdialenosti r tohto miesta od stredu telesa a nezávisí na hmotnosti m telesa, na ktoré gravitačné pole pôsobí. Ak smerujú vektory intenzity $\boldsymbol{K}$ do stredu telesa tvaru gule, akým je napríklad Zem, hovoríme o **centrálnom gravitačnom poli** a stred gule nazývame gravitačný stred (obr. 5.2).





Obr. 5.2. Centrálne gravitačné pole Zeme

Obr. 5.3. Homogénne gravitačné pole

Pre predpoklad, že Zem je rovnorodá guľa s hmotnosťou M_Z a polomerom R_Z, veľkosť intenzity K_h vo výške h nad zemským povrchom, t. j. vo vzdialenosti $Rz + h$ od stredu Zeme je určená vzťahom $K_h = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z+h)^2}$. Veľkosť intenzity gravitačného poľa K_0 na povrchu Zeme, t. j. $h = 0$ m, je určená vzťahom $K_0 = \kappa \frac{M_Z}{{R_Z}^2}$ a pre vektor intenzity platí $\boldsymbol{K} = -\kappa \frac{M_Z}{{R_Z}^2}\boldsymbol{r}$ kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom sa intenzita určuje. Centrálne gravitačné pole je priestorovo neohraničené a vo väčších vzdialenostiach od Zeme je gravitačné pole veľmi slabé. V menšej vybratej oblasti centrálneho poľa Zeme, napríklad v priestore niekoľkých metrov sa vektory intenzity $\boldsymbol{K}$ v jednotlivých miestach líšia minimálne a v takomto priestore je možné považovať smer aj veľkosť intenzity za konštantné (obr. 5.3). Gravitačné pole, ktoré má vo všetkých miestach rovnakú intenzitu $\boldsymbol{K}$ nazývame **homogénne gravitačné pole**.

Každá zmena polohy telesa v gravitačnom poli Zeme znamená aj zmenu potenciálnej energie telesa. **Potenciál gravitačného poľa** φ_g je gravitačná potenciálna energia pripadajúca na jeden kilogram v danom mieste poľa. Definovaná je ako podiel potenciálnej energie telesa $E_p = mKh$, ktorú má teleso v danom mieste gravitačného poľa a hmotnosti m tohto telesa

$$\varphi_g = \frac{E_p}{m}$$

Jednotka potenciálu gravitačného poľa je $\mathrm{J.kg^{-1}}$, $1\,\mathrm{J.kg^{-1}} = 1\,\mathrm{m^2.s^{-2}}$. Miesta s rovnakou hodnotou potenciálu tvoria v priestore plochy s rovnakým potenciálom nazývané **ekvipotenciálne plochy**.

5.3. Gravitačné a tiažové zrýchlenie

Gravitačné zrýchlenie

Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ udeľuje gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$ telesu s hmotnosťou m **gravitačné zrýchlenie** $\boldsymbol{a_g}$. Z porovnania vzťahov pre intenzitu gravitačného poľa $\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F_g}}{m}$ a gravitačného zrýchlenia $\boldsymbol{a_g} = \frac{\boldsymbol{F_g}}{m}$ platí

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}_g$$

Intenzita gravitačného poľa $\boldsymbol{K}$ v danom mieste poľa sa rovná gravitačnému zrýchleniu $\boldsymbol{a}_g$, ktoré v tomto bode udeľuje telesu gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$. Pre veľkosť gravitačného zrýchlenia, ktoré udeľuje Zem telesám vo výške h nad povrchom Zeme, alebo na povrchu Zeme platí

$$a_{gh} = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z+h)^2} \qquad a_g = \kappa \frac{M_Z}{{R_Z}^2}$$

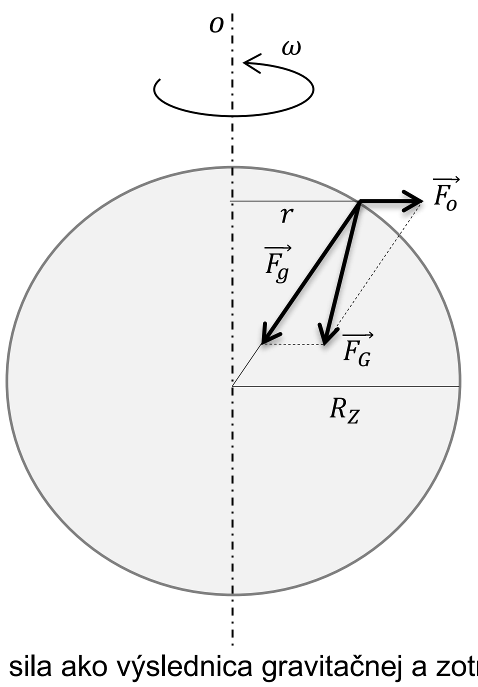
Veľkosť gravitačného zrýchlenia a_g s rastúcou vzdialenosťou od povrchu Zeme klesá, pričom na povrchu Zeme nadobúda najväčšiu hodnotu.

Tiažové zrýchlenie

Povrch Zeme tvorí s ohľadom na rotáciu Zeme neinerciálnu vzťažnú sústavu, ktorá rotuje uhlovou rýchlosťou veľkosti $\omega = 2\pi/T$, kde T je perióda pohybu. V tejto sústave pôsobí na všetky telesá ležiace pri povrchu Zeme gravitačná sila $\boldsymbol{F}_g$ smerujúca do gravitačného stredu a zotrvačná odstredivá sila $\boldsymbol{F}_o$ smerujúca kolmo od osi rotácie Zeme (obr. 5.4). Výslednica určená vektorovým súčtom gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_g$ a odstredivej sily $\boldsymbol{F}_o$ sa nazýva **tiažová sila** $\boldsymbol{F}_G$ a platí

$$\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{F}_o$$

Priestor okolo Zeme, v ktorom sa prejavujú účinky tiažovej sily sa nazýva **tiažové pole**. Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona je tiažová sila definovaná vzťahom $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$. **Tiažové zrýchlenie** $\boldsymbol{g}$ je zrýchlenie telesa, ktoré vo vákuu voľne padá na Zem. Smer tiažovej sily a tiažového zrýchlenia je definovaný ako smer zvislý.



Obr. 5.4. Tiažová sila ako výslednica gravitačnej a zotrvačnej sily

Veľkosť odstredivej sily $\boldsymbol{F}_o$ sa mení so zemepisnou šírkou miesta na povrchu Zeme podľa vzťahu $F_o = m\omega^2 r = m\omega^2 R_Z \cos\alpha$, kde r je vzdialenosť miesta od osi otáčania a R_Z polomer

Zeme. To znamená, že sa mení aj veľkosť tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$. Veľkosť tiažového zrýchlenia sa mení s veľkosťou tiažovej sily. Pri hladine mora v oblasti rovníka je približne $9{,}78\ \mathrm{m.s^{-2}}$, okolo zemepisných pólov $9{,}83\ \mathrm{m}.s^{-2}$, v ostatných oblastiach v uvedenom intervale. Zavedená je hodnota normálneho gravitačného zrýchlenia $g\ = 9{,}806\ 65\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Vo vybranej oblasti tiažového poľa sú rozdiely v hodnotách tiažovej sily také malé, že veľkosť aj smer tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$ sa považuje za konštantné.

5.4. Pohyby telies v homogénnom tiažovom poli Zeme

Nech sa telesá pohybujú pôsobením tiažovej sily, ktorá im udáva tiažové zrýchlenie, potom sú trajektórie telies neporovnateľne malé voči rozmerom Zeme. Keď vykonáva teleso dva alebo viac pohybov súčasne, jeho výsledná poloha je taká, ako by jednotlivé pohyby konalo za sebou v ľubovoľnom poradí. Vektor rýchlosti takého zloženého pohybu je určený vektorovým súčtom rýchlostí jednotlivých pohybov. Pohyby zložené z rovnomerného pohybu v smere začiatočnej rýchlosti a voľného pádu sa nazývajú **vrhy**: vodorovný, zvislý a šikmý.

Zvislý vrh nadol koná teleso hodené začiatočnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ v smere tiažového zrýchlenia $\boldsymbol{g}$. Teleso koná rovnomerne zrýchlený pohyb a jeho okamžitá rýchlosť v narastá s klesajúcou vzdialenosťou od Zeme. Pre veľkosť okamžitej rýchlosti a pre polohu telesa v čase t od začiatku pohybu platí

$$v = v_0 + gt$$

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

V prípade, že je začiatočná rýchlosť telesa nulová $v_0\ = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, teleso koná **voľný pád** a pre jeho okamžitú rýchlosť a polohu platí

$$v = gt$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Zvislý vrh nahor je pohyb, pri ktorom je telesu udelená začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ opačného smeru ako je tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$. Teleso koná rovnomerne spomalený pohyb, jeho okamžitá rýchlosť v klesá s narastajúcou výškou y a keď dosiahne najvyšší bod trajektórie je rýchlosť rovná nule (obr. 5.5.). Pre veľkosť okamžitej rýchlosti a pre okamžitú polohu telesa v čase t od začiatku pohybu platí

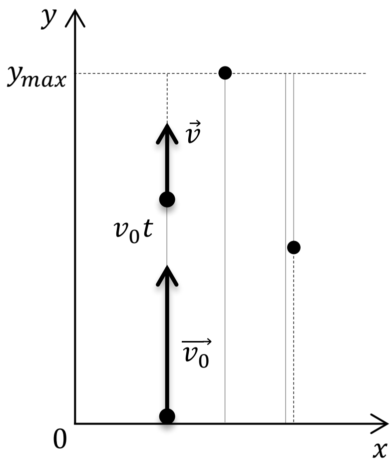
$$v = v_0 - gt$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

kde $v_0 t$ je dráha rovnomerného pohybu, $\frac{1}{2} g t^2$ je dráha voľného pádu. V maximálnej výške y_{max} je okamžitá rýchlosť telesa nulová $v_{max} = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, t. j. rýchlosť $v_0 - g t_{max} = 0$

a pre čas výstupu potom platí $t_{max} = \frac{v_0}{g}$. Dosadením času t_{max} do vzťahu pre dráhu dostaneme vzťah pre určenie výšky výstupu

$$y_{max} = v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$



Obr. 5.5. Zvislý vrh nahor

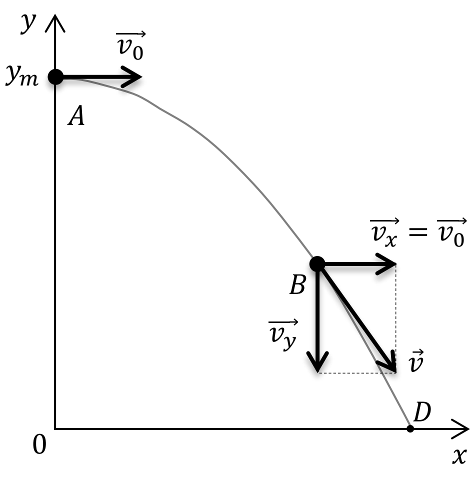
V poslednej fáze pohybu sa teleso vracia k miestu vrhu rovnomerne zrýchleným pohybom. V okamihu dopadu, keď je výška nulová sa z rovnice dráhy $0 = v_0 t_d - \frac{1}{2} g t_d^2$ po úprave vyjadrí čas dopadu

$$t_d = \frac{2v_0}{g} = 2t_{max}$$

Pre rýchlosť dopadu potom platí $v_d = v_0 - g t_d = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0$, teleso dopadá rovnako veľkou rýchlosťou akou bolo vrhnuté.

Vodorovný vrh je pohyb zložený z rovnomerného priamočiareho pohybu vo vodorovnom smere so začiatočnou rýchlosťou $\boldsymbol{v_0}$, ktorou bolo teleso vrhnuté a voľného pádu vo zvislom smere.

Obr. 5.6. Vodorovný vrh



Trajektória vodorovného vrhu je časť paraboly s vrcholom v mieste začiatku vrhu telesa (obr. 5.6). Na popis pohybu je zvolená súradnicová sústava Oxy s miestom vrhu v bode A so súradnicami $x_0 = 0\,\mathrm{m}$, $y_0 = h$. Začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ má smer osy x a pre veľkosť okamžitej rýchlosti a pre súradnice ľubovoľného bodu dráhy (bod B) v čase t od začiatku pohybu platí

$$v = \sqrt{{v_0}^2 + (gt)^2}$$
$$x = v_0 t$$
$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

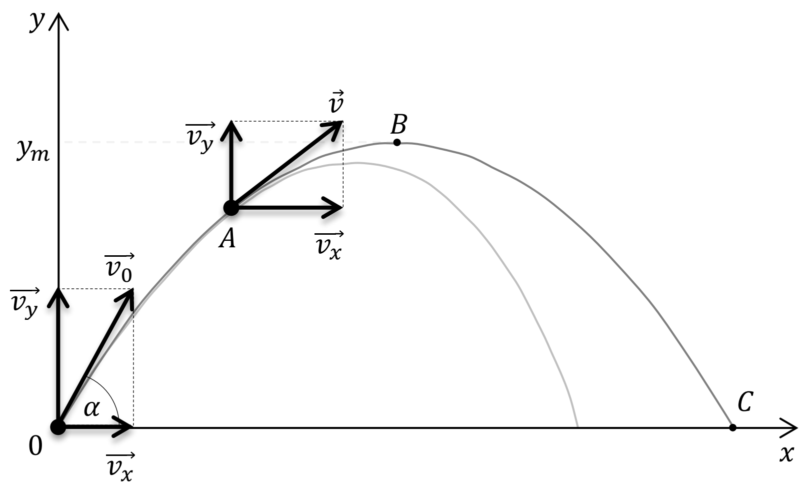
Najväčšiu vzdialenosť od miesta, kde vrháme teleso vo vodorovnom smere nazývame dĺžka vrhu d. V tejto vzdialenosti teleso dokončilo svoj pohyb a bod D má súradnice $x_D = d, y_D = 0\,\mathrm{m}$, preto $0 = h - \frac{1}{2} g t_d^2$ a odtiaľ po matematickej úprave pre čas, za ktorý dopadne teleso platí

$$t_d = \sqrt{2h/g}$$

Dosadením času dopadu t_d do vzťahu pre vzdialenosť $x_D = v_0 t_d$, pre dĺžku vodorovného vrhu platí vzťah

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Šikmý vrh je pohyb zložený z rovnomerného pohybu v smere začiatočnej rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ a voľného pádu. Telesu je udelená začiatočná rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ v smere, ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol α, ktorý sa nazýva elevačný uhol. Trajektória pohybu telesa je časť paraboly, ktorej vrchol B je v najvyššom mieste trajektórie.



Obr. 5.6. Šikmý vrh

Na popis pohybu je zvolená súradnicová sústava Oxy s bodom O, ktorý je miestom vrhu a má súradnice $x_0 = 0\ \mathrm{m}$, $y_0 = 0\ \mathrm{m}$. Bod A, v ktorom sa teleso bude nachádzať v čase t od začiatku pohybu má súradnice

$$x = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

a pre veľkosť okamžitej rýchlosti platí $v_x = v_0 \cos\alpha$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

Pre dĺžku dopadu $x_C = d$ je výška nulová $y_C = 0\ \mathrm{m}$ a teda $v_0 t_d \sin\alpha - \frac{1}{2} g {t_d}^2 = 0.$ Z rovnice pre výšku odvodením bude pre čas dopadu platiť

$$t_d = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

Po dosadení času dopadu t_d do vzťahu pre vzdialenosť dopadu $x_C = d = v_0 t_d \cos\alpha$ dostávame po matematickej úprave vzťah pre dĺžku vrhu

$$d = \frac{2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Dĺžka vrhu závisí od uhla α, pod ktorým teleso vrháme a od veľkosti začiatočnej rýchlosti v_0. Pri vrhu vo vzduchu je parabolická trajektória deformovaná vplyvom odporu vzduchu na balistickú krivku (obr. 5.6).

Pohyby telies v centrálnom gravitačnom poli Zeme a Slnka

Pre každú vzdialenosť r od stredu Zeme je možné nájsť tzv. **kruhovú rýchlosť** $\boldsymbol{v_k}$ a **parabolickú rýchlosť** $\boldsymbol{v_p}$. Veľkosť kruhovej a parabolickej rýchlosti je definovaná nasledovne

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \qquad\qquad v_p = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} = v_k\sqrt{2}$$

Úlohy ku kapitole 5

1. Akou veľkou gravitačnou silou sa priťahujú dve homogénne oceľové gule s priemerom d = 1 m, ktoré sa navzájom dotýkajú? Hustota ocele ρ = 7 800 kg.m^{-3}. *[F = 1,1.10^{-3}* N*]*
2. Stredná vzdialenosť Marsu a Slnka je r_M = 228.10^6 km, stredná vzdialenosť Zeme od Slnka je r_Z = 150.10^6 km, hmotnosť Marsu je M_M = 0,11 M_Z, kde M_Z je hmotnosť Zeme. Vypočítajte, koľkokrát menšou silou je priťahovaný Mars k Slnku, ako Zem k Slnku. *[Mars k Slnku je priťahovaný 0,0476 krát menšou silou ako Zem]*
3. V akom pomere je veľkosť gravitačnej sily, ktorou pôsobí Zem na telesá na zemskom povrchu $\mathrm{F_h}$ v nadmorskej výške h = 6400 m a veľkosť gravitačnej sily pri hladine mora $\mathrm{F_0}$. Stredný polomer Zeme je *R* = 6371 km. *[*$\mathrm{F_h}$*= 0,998* $\mathrm{F_0}$*]*
4. Určte zrýchlenie, akým by padali telesá na povrchu Mesiaca, ak je predpoklad, že na telesá pôsobí iba gravitačné pole Mesiaca. Hmotnosť Mesiaca je M_M = 1/81 M_z a polomer Mesiaca je R_M = 1/4 R_Z, kde M_Z je hmotnosť a R_Z je polomer Zeme. *[g_M = 0,2 g_Z = 1,962* m.s^{-2}*]*
5. V ktorom mieste na priamej spojnici medzi Zemou a Mesiacom sa intenzita spoločného gravitačného poľa rovná nule, keď vieme, že hmotnosť Mesiaca je 1/81 hmotnosti Zeme? *[v 1/10 ich spoločnej vzdialenosti od stredu Mesiaca]*
6. Vypočítajte veľkosť gravitačného zrýchlenia na povrchu Slnka. Hmotnosť Slnka je M_S = 1 989 100.10^{24} kg, polomer Slnka je R_S = 695997.10^3 m. *[a_g = 274* m.s^{-2}*]*
7. Raketa s hmotnosťou 1870 kg vystúpila do výšky 1,9 km nad povrch Zeme. Predpokladáme, že pohyb rakety sa uskutočnil v homogénnom gravitačnom poli s veľkosťou intenzity 9,80 N.kg^{-1}. Vypočítajte prácu, ktorú vykonali raketové motory. *[W = 3,5.10^7* J*]*
8. Meteorologická družica, ktorá sníma konkrétnu oblasť Zeme obieha súčasne s rotáciou povrchu Zeme po geostacionárnej dráhe, čo znamená, že vzhľadom na pozorovateľa na Zemi je nehybná táto dráha. Vypočítajte polomer dráhy, ak polomer Zeme je 6371 km a hmotnosť Zeme je M_Z = 5,974.10^{24} kg. *[r_d = 42.10^6* m*]*
9. Kameň je voľne pustený v šachte v bani do hĺbky h = 2500 m. Ako dlho bude kameň padať a aká bude rýchlosť dopadu kameňa? Odpor vzduchu zanedbajte. *[t = 22,58* s*, v = 221,47* m.s^{-1}*]*
10. Diviačia priepasť patrí k najhlbším priepastiam na Slovensku. Určte jej hĺbku, ak voľne pustený kameň dopadne na jej dno za čas 5,1 s. *[h = 127,58* m*]*
11. Tenisovú loptičku vo výške 4 m nad Zemou vrhneme zvisle nahor rýchlosťou 9 m.s^{-1}, zvisle nadol rovnakou rýchlosťou, pričom sa loptička pružne odrazí od vodorovného povrchu. Ako vysoko vystúpi loptička po odraze? Odpor vzduchu zanedbajte. *[8,13* m *nad Zemou v oboch prípadoch]*

12. Teleso bolo vrhnuté v smere zvislo nahor začiatočnou rýchlosťou 35 m.s^{-1}.
   a) Určte rýchlosť telesa na konci tretej sekundy pohybu.
   b) Určte čas, za ktorý dosiahne vrchol svojej dráhy.
   c) Do akej výšky teleso vystúpi?
   d) Určte čas od začiatku pohybu, za ktorý dopadne naspäť na Zem.
   e) Akou veľkou rýchlosťou dopadne teleso?
   [a) v_{t3} = 5,57 m.s^{-1}*, b) t_{max} = 3,57* s*, c) h_{max} = 62,44* m*, d) t = 7,14* s*, e) v_d = 35* m.s^{-1}*]*

13. V smere zvislo nahor bolo vrhnuté teleso začiatočnou rýchlosťou v_0 = 10 m.s^{-1}. V tom istom okamihu bolo vrhnuté teleso v smere zvislo nadol rovnakou začiatočnou rýchlosťou z maximálnej výšky, ktorú prvé teleso dosiahlo. Vypočítajte čas, za ktorý sa obe telesa budú míňať, stretnú sa. Určte vzdialenosť od povrchu Zeme, v ktorej sa stretnú a rýchlosti obidvoch telies v okamihu stretnutia.
   [t_s = 0,25 s*, h_s= 2,2* m*, v_1 = 7,5* m.s^{-1}*, v_2 = 12,5* m.s^{-1}*]*

14. Ak pustíme guľôčku na Zem z výšky h, dopadne rýchlosťou v. Z akej výšky ju musíme pustiť, aby dopadla na Zem rýchlosťou $2v$? *[h_1 = 4h]*

15. Oceľová guľôčka odskakuje od oceľovej podložky v 1-sekundových intervaloch. Ako vysoko sa guľôčka odráža? Predpokladáme že odraz je dokonale pružný. *[h = 1,23* m*]*

16. Dve telesá padajú z rôznych výšok, ale na Zem dopadnú súčasne. Pritom prvé teleso padá 2 s a druhé teleso 1 s. V akej vzdialenosti od Zeme je prvé teleso v okamihu, keď druhé teleso začne padať? *[h = 14,715* m*]*

17. Vypočítajte rýchlosť kameňa tesne pred dopadom na Zem, ak je hodený vo výške 15 m začiatočnou rýchlosťou v_0 = 10 m.s^{-1}
   a) vo zvislom smere nahor,
   b) vo zvislom smere nadol. *[a), b) v = 19,86* m.s^{-1}*]*

18. Puška je umiestnená vodorovne. Nech začiatočná rýchlosť náboja pri výstrele z pušky je 300 m.s^{-1}, a cieľ je vzdialený 50 m. Určte výšku, o ktorú klesne trajektória náboja od vodorovného smeru pri streľbe na cieľ. *[y = 0,14* m*]*

19. Lietadlo letiace rýchlosťou 450 km.h^{-1} vo výške 2,2 km nad Zemou má vypustiť náklad. V akej vodorovnej vzdialenosti od miesta dopadu musí lietadlo tento náklad vypustiť, aby dopadol na vopred určené miesto? Zanedbajte odpor vzduchu. *[s = 2,647* km*]*

20. Chcete prehodiť kameň cez rieku, ktorá je 40 m široká. Vypočítajte uhol α, pod ktorým musíte hádzať kameň a veľkosť začiatočnej rýchlosti, ktorú musíte kameňu udeliť, ak pohyb bude trvať 1,5 s. *[α = 15°25´28´´, v_0 = 27,7* m.s^{-1}*]*

21. Vrh guľou je atletická disciplína. Cieľom atléta v kategórii muži je čo najďalej vrhnúť guľou ťažkou 7,26 kg, s priemerom 13 cm. Akou rýchlosťou by mal atlét vrhnúť guľu pod uhlom 40° vzhľadom na povrch Zeme, ak chce, aby dĺžka vrhu bola 23 m?
   [v = 15,14 m.s^{-1}*]*

6. Mechanika pevného a tuhého telesa

Ak nie je možné zanedbať rozmery a tvar fyzikálneho objektu, nemožno vychádzať z úvah o hmotnom bode, ale je potrebné uvažovať hmotný objekt konkrétneho tvaru a objemu. Fyzikálny objekt je látka alebo má povahu poľa. Teleso je objekt látkovej povahy s priestorovým obmedzením. Dôležitou charakteristikou látky, z ktorej je teleso zhotovené je fyzikálna veličina **hustota** ρ. Pre rovnorodú látku je hustota ρ definovaná ako podiel hmotnosti m a objemu telesa V a vyjadrená vzťahom

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jednotkou hustoty ρ je $\mathrm{kg.m^{-3}}$ a hodnoty hustôt odpovedajúce rôznym látkam sú dostupné v tabuľkách.

Účinkom vonkajších síl na teleso môže nastať zmena pohybového stavu telesa alebo môže nastať deformácia telesa. Teleso, v ktorom sa môžu vzájomné vzdialenosti jeho častí meniť účinkom vonkajších síl sa nazýva **pevné teleso**, teleso je deformovateľné. Často sa pracuje s pojmom **dokonale tuhé teleso**, ak sa vzájomné vzdialenosti telesa účinkom síl nemenia, teleso je nedeformovateľné.

6.1. Mechanické vlastnosti pevných látok

Zmena tvaru, objemu pevného telesa alebo obidvoch vlastností súčasne zapríčinená účinkom vonkajších síl sa nazýva **deformácia** telesa. Ak na teleso nepôsobia vonkajšie sily, tak vnútorné príťažlivé a odpudivé sily sú v rovnováhe. Ak na teleso začnú pôsobiť vonkajšie sily a teleso ostáva v pokoji, rovnováha vnútorných síl sa naruší a teleso sa deformuje. Podľa toho ako sa správajú telesá pri deformácií, rozdeľujeme deformáciu na pružnú (elastickú) a tvárnu (plastickú).

Pružná deformácia je časť deformácie telesa, pri ktorej teleso nadobudne pôvodný tvar v okamihu, keď na teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily. Vlastnosť telies obnovovať svoje rozmery, tvar a objem sa nazýva **pružnosť** (napríklad malé predĺženie pružiny). Časť deformácie telesa, ktorá zostáva aj potom, ako prestanú na teleso pôsobiť deformujúce sily sa nazýva **tvárna deformácia**. V praxi sa vyskytujú najčastejšie oba druhy deformácie súčasne a najčastejšie sú zložené z niektorých nasledujúcich jednoduchých deformácií.

Podľa toho ako sily na pružne deformované teleso pôsobia, rozoznávame nasledujúce jednoduché deformácie: ťahom, tlakom, ohybom, šmykom, krútením. Ak na teleso pôsobia dve rovnako veľké, opačne orientované sily so smermi von z telesa, vzniká deformácia **ťahom** (obr. 6.1), teleso zväčší svoju dĺžku. Ak smerujú tieto sily dovnútra telesa vzniká deformácia **tlakom**, teleso skracuje svoju dĺžku. Pri deformácii **ohybom** pôsobí na teleso sila kolmo ku jeho pozdĺžnej osi, pričom sa spodné vrstvy telesa skracujú a vrchné predlžujú. Ak dotyčnicové sily spôsobia posunutie vrstiev telesa bez zmeny objemu, vzniká deformácia

šmykom. Deformácia **krútením** vzniká v prípade, ak napríklad na koncoch tyče pôsobia dve dvojice síl, ktoré majú rovnako veľké, ale opačne orientované momenty síl.

Pri deformácií sú častice látky pôsobením vonkajších síl vychyľované z rovnovážnych polôh a tomuto vychyľovaniu bránia sily vzájomného pôsobenia medzi časticami nazývané **sily pružnosti $\boldsymbol{F_p}$**. Pri deformácii ťahom alebo tlakom je v rovnovážnom stave veľkosť sily pružnosti F_p rovná veľkosti deformujúcej sily F.

Normálové napätie

Fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje stav napätia (tlak) vyvolaný silou $\boldsymbol{F}$ pôsobiacou na plochu telesa S pri deformácii sa nazýva mechanické napätie. Kolmý priemet napätia do smeru normály uvažovanej plochy sa nazýva **normálové napätie** a je definované ako

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}$$

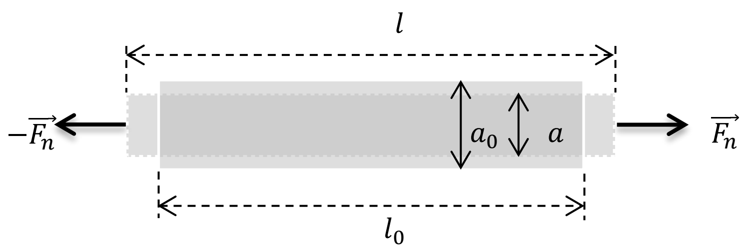
kde $\boldsymbol{F_n}$ je normálová zložka sily $\boldsymbol{F}$, S je obsah plochy. Jednotka mechanického napätia je pascal $(\mathrm{P_a})$, $1\ \mathrm{P_a} = 1\ \mathrm{N.m^{-2}} = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$.

Podľa veľkosti normálového napätia je možné určiť, kedy je deformácia ťahom, tlakom ešte pružná. Napätie, pre ktoré platí Hookov zákon sa nazýva **medza úmernosti**. Maximálne napätie, pri ktorom je nepružná deformácia pevného telesa zanedbateľná, sa nazýva **medza pružnosti**. Ak dôjde k prekročeniu medze pružnosti, bude teleso trvale deformované. **Medza prieťažnosti**, sklzu, je najmenšie napätie, ktoré keď sa prekročí, tak sa deformácia zväčšuje skoro bez zvyšovania napätia. Ak normálové napätie prekročí **medzu pevnosti** porušuje sa súdržnosť materiálu. Ak má materiál medzu pružnosti veľmi blízko medzi pevnosti, tak látku nazývame krehká. Závislosť normálového napätia od relatívneho predĺženia telesa sa vyjadruje v praxi prostredníctvom krivky deformácie. V technike je štúdium správania sa telies veľmi dôležité. Napríklad vznik trhlín a porušenie materiálov môže spôsobiť zrútenie mostu, domu, prasknutie potrubia, skrehnutie kovov chladom môže spôsobiť haváriu lodí, atď. V praxi je zavedený pojem dovolené napätie, ktorého hodnota sa volí oveľa menšia ako je medza pevnosti.

Deformácia ťahom alebo tlakom

Ak na pružnú dlhú tyč pri deformácii ťahom pôsobí normálová sila, dĺžka tyče sa predĺži z pôvodnej dĺžky l_0 na dĺžku l. Zmena dĺžky $\Delta l = l - l_0$ sa nazýva predĺženie (obr. 6.1). Predĺženie je úmerné pôvodnej dĺžke tyče. **Relatívne predĺženie** ε je definované ako podiel zmeny dĺžky Δl a pôvodnej dĺžky l_0 pri deformácii ťahom vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$



Obr. 6.1. Predĺženie tyče deformáciou ťahom

Predĺženie tyče je sprevádzané aj zmenšením priečneho rozmeru. **Relatívne skrátenie** priečneho rozmeru je definované vzťahom

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

kde a_0 je rozmer pred deformáciou, a je rozmer po deformácii. Ak m je Poissonova konštanta, možno vyjadriť vzťah medzi relatívnym predĺžením a priečnym skrátením vzťahom

$$\eta = \frac{1}{m}\varepsilon = \frac{\sigma}{mE}$$

E je konštanta úmernosti charakterizujúca pružné vlastnosti látok a nazýva sa **modul pružnosti v ťahu** (**Youngov modul**). Jednotkou modulu pružnosti E je pascal ($\mathrm{P_a}$).

Hookov zákon pre deformáciu ťahom:

Pri pružnej deformácii je normálové napätie priamo úmerné relatívnemu predĺženiu.

$$\sigma = E\varepsilon$$

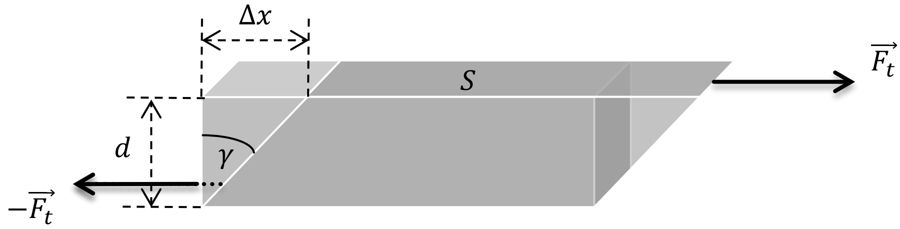
Hookov zákon pre pružnú deformáciu ťahom (tlakom) platí v oblasti lineárnej deformácie, kde je deformácia pružných telies priamo úmerná pôsobiacim silám a naopak. Dosadením do vyššie uvedeného vzťahu za napätie a relatívne predĺženie platí nasledujúci matematický tvar Hookovho zákona

$$\frac{F_n}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

Pre deformáciu tlakom platia analogické vzťahy, no dochádza ku skráteniu dĺžky a k predĺženiu priečneho rozmeru.

Deformácia šmykom

Pri deformácii pružných telies šmykom môže byť napríklad hranol v spodnej základni upevnený a vo vrchnej základni namáhaný napätím. Jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu sa posúvajú po sebe bez toho, aby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť d. Na hranol s malou výškou (aby nenastal ohyb) pôsobí dotyčnicová sila $\boldsymbol{F_t}$. Pôsobením dotyčnicovej (tangenciálnej) sily $\boldsymbol{F_t}$ na vrchnú stenu hranola s obsahom S vznikne šmykové, tangenciálne napätie (obr. 6.2).



Obr. 6.2. Deformácia telesa šmykom

Tangenciálne napätie τ je priemet napätia do dotykovej plochy roviny uvažovanej plochy

$$\tau = \frac{F_t}{S}$$

Pre deformáciu šmykom má **Hookov zákon pre šmyk** tvar

$$\tau = G\gamma$$

G je **modul pružnosti v šmyku** a je to materiálová konštanta, ktorej jednotka je pascal ($\mathrm{P_a}$), γ je **relatívne posunutie** (skosenie) hornej základne vzhľadom na dolnú. Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však ku **skoseniu** γ (natočeniu o uhol γ), ktoré sa nazýva **relatívne posunutie**

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d}$$

Δx je posunutie rezu hranola rovnobežného s podstavou, d je vzdialenosť rezu od podstavy.

Deformácia krútením

Ak je napríklad voľný koniec valcovej tyče s kruhovým prierezom namáhaný silami, t. j. pôsobí krútiaci moment M vzhľadom na os tyče a druhý koniec je nepohyblivý, potom **Hookov zákon pre krútenie** má tvar

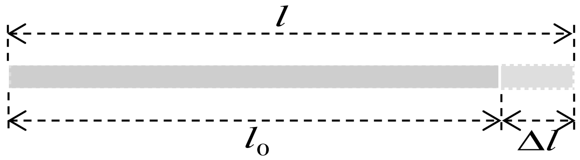
$$\vartheta = \frac{2lM}{\pi r^4 G}$$

ϑ je uhol, o ktorý sa pootočí jeden prierez voči druhému, l je vzdialenosť uvažovaných prierezov (dĺžka tyče), M je moment dvojice síl a r polomer tyče. Pri krútení tyče sa uplatňuje modul pružnosti v šmyku G, nazývaný aj modul pružnosti v torzii.

6.2. Teplotná rozťažnosť pevných látok

Pri zmene teploty telesa z pevnej látky nastáva jeho teplotná rozťažnosť. So zvyšujúcou sa teplotou rastie stredná rýchlosť molekúl, rastie ich rozkmit. V dôsledku toho sa zväčšujú vzdialenosti medzi ich rovnovážnymi polohami s čím priamo súvisí zväčšovanie rozmerov a objemu látok, telies. **Teplotná rozťažnosť** je fyzikálny jav, ktorý charakterizuje zmenu rozmerov, objemu pevných látok a kvapalín pri zmene teploty telesa.

Dĺžková teplotná rozťažnosť je zmena jedného, dĺžkového rozmeru telesa (pri pevných látkach) zapríčinená zmenou teploty telesa. Relatívnu zmenu dĺžky pri ohriatí o jeden kelvin udáva **súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti** α. Konštanta úmernosti α je materiálová konštanta, ktorej jednotkou je K^{-1}.



Obr. 6.3. Predĺženie materiálu pri teplotnej rozťažnosti

Nech l_0 je pôvodná dĺžka tyče pri teplote T_0 a pri teplote $T > T_0$ sa táto dĺžka zväčší na hodnotu $l > l_0$. Zmena dĺžky, predĺženie tyče $\Delta l = l - l_0$ je priamo úmerné zmene teploty $\Delta T = T - T_0$ (obr. 6.3). Pri malých zmenách teploty je toto predĺženie úmerné pôvodnej dĺžke $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$. Po dosadení $l - l_0 = \alpha l_0 \Delta T$ a matematickej úprave pre dĺžku po predĺžení platí

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

Predĺženie tyče je priamo úmerné pôvodnej dĺžke tyče a prírastku jej teploty.

Objemová teplotná rozťažnosť charakterizuje zmenu objemu telesa zapríčinenú zmenou teploty telesa. Pri malej zmene teploty závisí priamo úmerne objem V telesa od zmeny teploty ΔT a platí

$$V = V_0(1 + \beta \Delta T)$$

kde V je objem telesa po zohriatí a V_0 je pôvodný objem telesa. **Súčiniteľ teplotnej objemovej rozťažnosti** β udáva relatívnu zmenu objemu telesa pri ohriatí o jeden kelvin. Jednotkou β je K^{-1}. Pri izotropných látkach je $\beta \cong 3\alpha$. Pri kvapalinách je možné hovoriť iba o objemovej rozťažnosti, pretože nemajú stály tvar.

Jav teplotnej rozťažnosti v praxi pozorujeme napríklad pri zmene dĺžky drôtov natiahnutých medzi stĺpmi elektrického vedenia. Rôznorodé materiály, ktoré podliehajú zmenám teplôt je možné trvalo spojiť iba vtedy, ak sú ich súčinitele teplotnej rozťažnosti podobné, ako je to napríklad v oceľovobetónových konštrukciách budov.

6.3. Mechanika tuhého telesa

Pri skúmaní pohybu pevného telesa ako celku sa vychádza z predpokladu, že sa tvar a veľkosť telesa nemení. Používa sa pojem **dokonalé tuhé teleso,** ktoré predstavuje ideálne teleso nedeformovateľné účinkom vonkajších síl. Účinkom vonkajších síl môže tuhé teleso vykonávať pohyb posuvný (translačný), otáčavý (rotačný) alebo je zložený z translačného a rotačného pohybu. Pri **posuvnom pohybe** všetky body telesa opisujú rovnaké trajektórie a v danom okamihu majú rovnakú rýchlosť. **Otáčavý pohyb** dokonale tuhého telesa je pohyb, pri ktorom sa všetky body telesa pohybujú rovnako veľkou uhlovou rýchlosťou po dráhach tvaru kružníc so stredmi na jednej priamke, ktorá je osou otáčania.

Najjednoduchším pohybom je pohyb okolo nehybnej osi, ako je napríklad pohyb vrtule ventilátora alebo pohyb dverí v miestnosti. Zložený pohyb vykonáva napríklad letiaci rotujúci disk, planéty obiehajúce okolo Slnka. Otáčavý účinok sily závisí od veľkosti, smeru sily a polohe jej pôsobiska.

Moment sily $\boldsymbol{M}$ je vektorová fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje mieru otáčavého účinku sily $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na pevný bod, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily. Moment sily je definovaný vektorovým súčinom

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Jednotkou momentu sily $\boldsymbol{M}$ je $\mathrm{N.m}$, $1\,\mathrm{N.m} = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$. Smer momentu sily sa určuje pravidlom pravej ruky (v kapitole 2. Skalárne a vektorové veličiny). V prípade, že na teleso pôsobí súčasne niekoľko síl, výsledný moment $\boldsymbol{M}$ síl súčasne pôsobiacich na tuhé teleso je určený vektorovým súčtom momentov jednotlivých síl $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \dots \boldsymbol{M}_n$ vzhľadom k osi otáčania

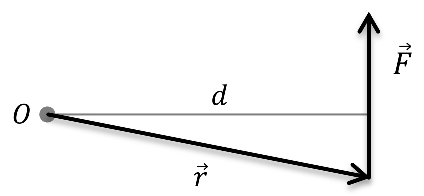
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}$$

Otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi sa navzájom ruší, ak je vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom k osi otáčania nulový, $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i} = \boldsymbol{0}$, teleso je v pokoji alebo v rovnomernom otáčavom pohybe. Táto veta sa nazýva **momentová veta**.

Skladanie síl je nahrádzanie síl jednou silou, výslednicou, podľa pravidiel vektorového počtu. Ak sústavu síl, ktoré pôsobia na teleso nahradíme výslednicou, pohybové účinky na teleso budú stále rovnaké. Rozklad síl je opačný proces, postup a to nahradenie jednej sily sústavou síl s rovnakým účinkom, ako má daná sila. Zvláštnym prípadom pôsobenia síl je dvojica síl. Vtedy sú sily rovnobežné, opačného smeru a pôsobia v dvoch rôznych bodoch telesa otáčajúceho sa okolo nehybnej osi. Táto dvojica síl má na teleso otáčavý účinok, ktorý vyjadruje fyzikálna veličina moment dvojice síl. V praxi sa objavuje dvojica síl pri uťahovaní skrutiek, pri otáčaní volantu automobilu. Veľkosť momentu sily M vzhľadom na os je definovaná súčinom veľkosti pôsobiacej sily F a ramena sily d, t. j. kolmej vzdialenosti vektorovej priamky sily od osi otáčania telesa (obr. 6.4)

$$M = Fd$$

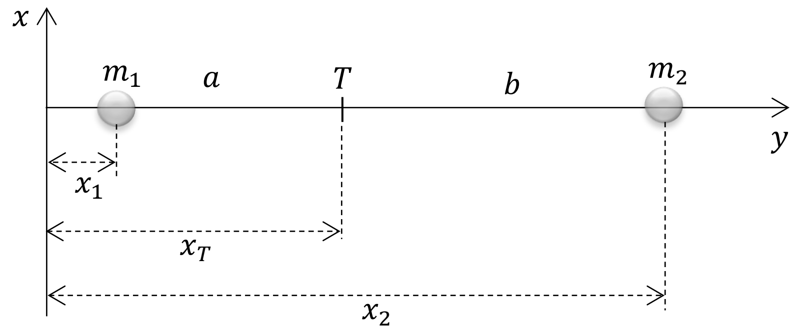
Obr. 6.4. K dedinícii momentu sily



Ťažisko telesa

V homogénnom tiažovom poli pôsobia na všetky hmotné body, z ktorých je zložené teleso, navzájom rovnobežné tiažové sily a ich zložením je určená výsledná tiažová sila. Ťažisko tuhého telesa je pôsobisko tiažovej sily. Poloha ťažiska závisí od rozloženia látky v telese.

Ťažisko nazývaný aj **hmotný stred** telesa je geometrický bod určený rozmiestnením hmotnosti telesa, je určený priesečníkom ťažníc, ktoré sa získajú rôznymi otočeniami telesa. Pre odvodenie matematických vzťahov definujúcich súradnice hmotného stredu sa vychádza z definície hmotného stredu T dvoch hmotných bodov. Hmotný stred dvoch hmotných bodov s hmotnosťami m_1, m_2 leží na spojnici týchto bodov (obr. 6.5) a rozdeľuje spojnicu v pomere k hmotnostiam, pričom platí $\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}$.



Obr. 6.5. Hmotný stred dvoch hmotných bodov

Nech x_T je súradnica, potom pre vzdialenosti platí $a = x_T - x_1$, $b = x_2 - x_T$ a dosadením do pomeru $\frac{x_2 - x_T}{x_T - x_1} = \frac{m_1}{m_2}$ a následnou matematickou úpravou bude pre x-ovú súradnicu platiť vzťah $x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$. Potom pre n hmotných bodov rozmiestnených v priestore bude platiť pre súradnice hmotného stredu $T = (x_T, y_T, z_T)$

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \qquad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \qquad z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

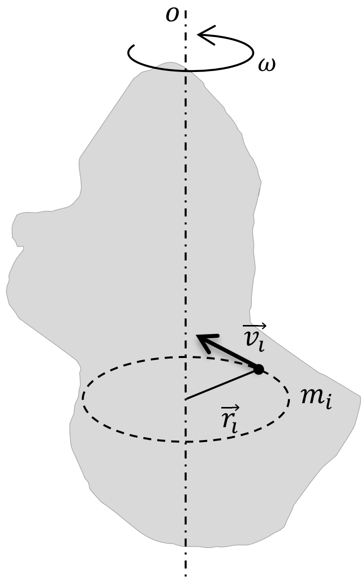
Kde m_i je hmotnosť i-teho hmotného bodu a $x_i,\ y_i,\ z_i$ jeho súradnice, pričom $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ je hmotnosť celej sústavy hmotných bodov. Hmotný stred telesa popisujeme tými istými zákonmi ako pohyb hmotného bodu, ktorého hmotnosť je rovná hmotnosti telesa a platí **veta o pohybe hmotného stredu** (**ťažiska**) v tvare

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = m\boldsymbol{a}_T$$

kde $\boldsymbol{a}_T$ je zrýchlenie hmotmého stredu telesa. Rovnorodé telesá ako napríklad guľa, kocka, tyč majú hmotný stred v strede súmernosti. Rovnorodé telesá s osou súmernosti ako napríklad ihlan, rotačný kužeľ majú ťažisko na osi. Ťažisko telesa sa môže nachádzať aj mimo telesa, napríklad ťažisko dutej gule, valca, prsteňa, a. i.

Kinetická energia tuhého telesa

Pri posuvnom pohybe telesa opisujú všetky body telesa rovnaké trajektórie a v každom okamihu majú rovnakú rýchlosť. To znamená, že kinetická energia telesa s hmotnosťou m pohybujúceho sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ je určená vzťahom $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.



Obr. 6.6. K odvodeniu vzťahu pre kinetickú energiu rotujúceho telesa

Pri otáčavom pohybe telesa okolo nehybnej osi je rýchlosť jednotlivých bodov priamo úmerná polomeru kružníc, po ktorých sa body pohybujú $v_1 = r_1\omega$, $v_2 = r_2\omega$, ..., $v_n = r_n\omega$. Potom kinetickú energiu telesa určíme ako súčet kinetických energií jednotlivých bodov nasledovne

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_n^2)$$

Kinetická energia závisí na rozložení látky v tuhom telese. **Moment zotrvačnosti** I je fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje mieru zotrvačných vlastností telesa pri jeho otáčavom pohybe. Moment zotrvačnosti závisí od hmotnosti telesa a od jej rozloženia od osi otáčania. Súčet súčinov hmotnostných elementov telesa a druhých mocnín ich vzdialeností od osi otáčania určuje **moment zotrvačnosti**

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$

kde m_i je hmotnosť i-teho elementu telesa, r_i polomer otáčania i-teho elementu telesa (obr. 6.6). Jednotka momentu zotrvačnosti je $\mathrm{kg.m^2}$.

Kinetická energia E_k telesa rotujúceho vzhľadom na nehybnú os otáčania uhlovou rýchlosťou ω je priamo úmerná momentu zotrvačnosti telesa I vzhľadom na os otáčania a je definovaná vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Teleso, časti telesa konajúceho rotačný pohyb pôsobia na nehybnú os odstredivými silami. Ak sa naruší účinok odstredivých síl, tak os rotácie bude voľná. Ak koná teleso súčasne posuvný pohyb a rotačný pohyb okolo osi prechádzajúcej ťažiskom, je kinetická energia určená súčtom kinetickej energie posuvného pohybu a rotačného pohybu

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

kde m je hmotnosť telesa, v veľkosť rýchlosti ťažiska telesa, I moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania prechádzajúcou ťažiskom telesa a ω uhlová rýchlosť otáčania sa telesa okolo tejto osi.

Úlohy ku kapitole 6

1. Určte normálové napätie, ak sa pôsobením deformujúcej sily oceľový drôt pôvodnej dĺžky 4 m predĺži o 5 mm. Modul pružnosti v ťahu ocele je 200 GPa. *[σ = 250* MPa*]*
2. Aký je modul pružnosti v ťahu oceľového drôtu s dĺžkou l_0 = 1 m a s obsahom prierezu S = 0,5 mm^2, keď sa drôt pôsobením sily F = 200 N predĺži o Δl = 2 mm? *[E = 200* GPa*]*
3. Struna gitary pôvodnej dĺžky 65 cm má obsah prierezu je 0,325 mm^2. Vypočítajte, akou veľkou silou je napínaná struna gitary v prípade, že sa struna pri napnutí predĺži o 5 mm. Modul pružnosti v ťahu ocele je 220.10^9 Pa. *[F = 550* N*]*
4. Pri akej dĺžke by sa roztrhol vplyvom vlastnej tiaže olovený drôt, zavesený na jednom konci. Drôt má vo všetkých miestach rovnaký prierez, medza pevnosti olova je σ = 2,1.10^7 Pa a hustota olova je ρ = 11 340 kg.m^{-3}. *[l = 188,77* m*]*
5. Máme hliníkový drôt s polomerom r = 1,5 mm a dĺžkou l_0 = 7 m. Bremeno akej hmotnosti môžeme na drôt zavesiť, aby nebola prekročená medza pružnosti σ = 95 MPa? Aké bude predĺženie drôtu zaťažené daným bremenom? Modul pružnosti v ťahu hliníka je E = 69.10^9 Pa. *[m = 68,5* kg*, Δl = 9,6.10^{-3}* m*]*
6. Akou najväčšou silou je možné napínať cínový drôt, ktorého priemer je 2,6 mm, aby nebola prekročená medza úmernosti 3,4 MPa? *[F = 18* N*]*
7. Lano je spletené z 20 oceľových drôtov, z ktorých každý z drôtov má polomer 1 mm. Určte veľkosť najmenšej sily, pôsobením ktorej sa lano pretrhne, ak medza pevnosti ocele je 5.10^8 Pa. *[F = 31,4* kN*]*
8. Maximálne zaťaženie výťahu je 3000 kg a maximálne zrýchlenie, ktorým sa môže pohybovať je 1,5 m.s^{-2}. Z bezpečnostného hľadiska je napätie pôsobiace na prierez lana navrhnuté tak, aby bolo 5 krát menšie ako je medza pevnosti materiálu s hodnotou 5.10^8 N.m^{-2}. Aký by mal byť priemer lana, na ktorom je zavesená kabína výťahu? *[d = 0,019* m*]*
9. Aké je relatívne predĺženie železnej tyče, ak sa ohriala z 0°C na 45°C. Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti železa je 12.10^{-6} K^{-1}. *[ε = 5,4.10^{-4}]*
10. Drôt zo železa má pri teplote T_1 = 263,15 K dĺžku l_1 = 50 m. Aká je dĺžka drôtu l_2, ak stúpne jeho teplota na T_2 = 293,15 K? Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti železa α = 12.10^{-6} K^{-1}. *[l_2 = 50,018* m*]*
11. Dĺžka oceľovej tyče pri teplote 0°C je 80 cm a hliníkovej tyče pri tej istej teplote 79,5 cm. Pri akej teplote budú mať obidve tyče rovnaké dĺžky? Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti ocele je 12.10^{-6} K^{-1}, hliníka 24.10^{-6} K^{-1}. *[t = 530*°C*]*

12. Koleso rušňa má pri teplote 0°C polomer 1 m. Aký je rozdiel v počte otočení kolesa na dráhe 100 km v lete pri teplote 25°C a v zime pri teplote -25°C? Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti materiálu kolesa je 12.10^{-6} K^{-1}. *[Δn = 9,5 otočení]*

13. Oceľovým metrom bola nameraná dĺžka 80 cm. S akou chybou bude nameraná dĺžka, ak sa oceľový meter v lete ohreje na teplotu 40°C? Oceľový meter bol kalibrovaný pri teplote 20°C. [$\Delta l = 19{,}2.10^{-3}$ m]

14. Koľajnica z ocele má pri teplote 0°C dĺžku 10,000 m. V zime klesá teplota na -20°C a v lete stúpa teplota koľajnice na 40°C. Určte, akú dĺžku má koľajnica pri teplote v zime a v lete. Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti železa je $\alpha = 12.10^{-6}$ K^{-1}.
[*v lete* $l_l = 10{,}005$ m, *v zime* $l_z = 9{,}998$ m]

15. Sklenený demižón bol pri teplote 15°C naplnený po okraj vínom s objemom 50 l. Po určitom čase teplota v miestnosti stúpla na 30°C. Určte, aký objem vína z demižónu vytieklo. Zväčšenie objemu skleneného demižónu zanedbajte. Súčiniteľ teplotnej objemovej rozťažnosti vína je $\beta = 0{,}001$ K^{-1}. [$V = 0{,}75$ l]

16. Cisterna na naftu má tvar valca s výškou h = 6 m. Cisterna je naplnená naftou tak, že pri teplote 0°C je hladina nafty 20 cm pod okrajom. Pri akej maximálnej teplote je potrebné skladovať naftu, aby nezačala vytekať z cisterny? Súčiniteľ teplotnej objemovej rozťažnosti nafty je približne 0,001 K^{-1}, objemovú rozťažnosť cisterny neuvažujeme. [$t_{max} = 34$°C]

17. Železničné koľajnice sa zvárajú približne pri teplote okolitého vzduchu 20°C. Aké je mechanické, normálové napätie, ktoré vzniká v lete ohriatím koľajnice na 75°C a v zime ochladením okolitého vzduchu na -20°C? Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti ocele $\alpha = 1{,}2.10^{-5}$ K^{-1}, modul pružnosti ocele $E = 2.\ 10^{11}$ Pa.
[*pre ohriatie* $\sigma = 132$ MPa, *pre ochladenie* $\sigma = 84$ MPa]

18. Hmotné body rozložené v priestore, majú nasledujúce polohy a hmotnosti: A = (2, 1, 1) m, m_1 = 1 kg, B = (-1, 5, -3) m, m_2 = 2 kg, C = (-2, 3, -3) m, m_3 = 3 kg, D = (4, 0, 1) m, m_4 = 4 kg. Určte polohu hmotného stredu sústavy hmotných bodov.
[*T = (1, 2,-1)* m]

19. Oceľový valec s momentom zotrvačnosti 100 kg.m^2 sa má roztočiť na 54 otáčok za minútu. Vypočítajte, akú prácu je potrebné vykonať na roztočenie valca.
[*W = 1599* J]

20. Vypočítajte frekvenciu zotrvačníka, ktorého moment zotrvačnosti je 300 kg.m^2, aby po dobu 13 minút dodával výkon 23 kW. [$f = 55$ s^{-1}]

21. Vypočítajte kinetickú energiu rotora elektromotora, ktorý má hmotnosť m = 115 kg, moment zotrvačnosti I = 2,2 kg.m^2 a otáča sa s frekvenciou f = 18 s^{-1}. [$E_k = 14070$ J]

7. Mechanika tekutín

Základnou spoločnou vlastnosťou kvapalín a plynov je **tekutosť**. Príčinou tekutosti je ľahká vzájomná pohyblivosť častíc, z ktorých sa kvapalné a plynné telesá skladajú. Kvapaliny a plyny sa nazývajú spoločným názvom **tekutiny** a mechanika kvapalín a plynov sa nazýva mechanika tekutín.

Kvapalné telesá v rôznych tvaroch nádob zachovávajú stály objem. Ak sú kvapaliny v pokoji, tak v tiažovom poli Zeme vytvárajú voľný vodorovný povrch, tzv. voľnú hladinu.

Plynné telesá nemajú stály objem ani tvar, nevytvárajú voľnú hladinu. Objem a tvar je určený tvarom a objemom nádoby, v ktorej je plyn uzavretý.

Vzájomná pohyblivosť častíc rôznych plynov je rôzna a vzájomná pohyblivosť častíc plynu je väčšia ako pri kvapalinách. Príčinou rôznej tekutosti je **vnútorné trenie (viskozita)**, ktoré sa prejavuje vznikom odporových síl pôsobiacich proti pohybu častíc tekutiny. **Ideálna kvapalina** je nestlačiteľná, dokonale tekutá a bez vnútorného trenia. **Ideálny plyn** je dokonale stlačiteľný a dokonale tekutý bez vnútorného trenia.

7.1. Statika tekutín

Podmienky a zákonitosti rovnováhy tekutín, ktoré sa nachádzajú pod vplyvom vnútorných a vonkajších síl, podmienky rovnováhy tuhých telies, ktoré sa nachádzajú v kvapalinách a plynoch skúma statika tekutín.

Tlak p je fyzikálna veličina, ktorá určuje v ľubovoľnom mieste stav tekutiny. Tlak je definovaný podielom veľkosti sily F pôsobiacej kolmo na plochu s obsahom S

$$p = \frac{F}{S}$$

Jednotkou tlaku je pascal (Pa), $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$. $1\ \mathrm{Pa}$ je sila $1\ \mathrm{N}$ rovnomerne rozložená na ploche $1\ \mathrm{m^2}$ a pôsobí kolmo na túto plochu. Tlak v tekutinách môže byť vyvolaný vonkajšou silou pôsobiacou na povrch tekutiny, alebo tiažovou silou, ktorou pôsobí Zem na tekutinu.

Tlak v tekutine vyvolaný vonkajšou silou

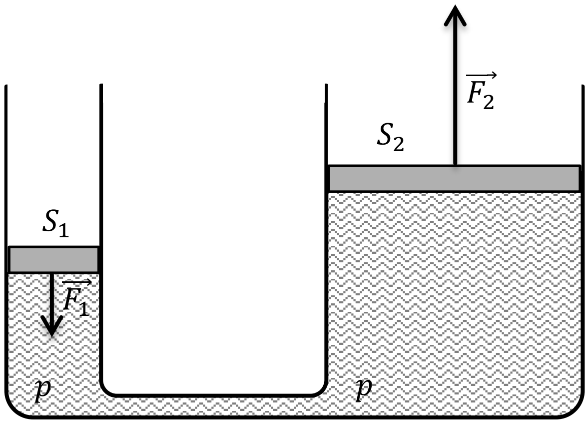
V dôsledku tekutosti sa v kvapalnom telese prenáša tlaková sila do všetkých smerov tak, že pôsobí kolmo na určitú plochu kvapalného telesa. Tlak v kvapaline závisí od veľkosti vonkajšej sily, obsahu plochy a nezávisí od objemu a hustoty.

Pascalov zákon:

Tlak v kvapalinách (plynoch), ktoré sú uzavreté v nádobe, vyvolaný vonkajšou silou pôsobiacou na povrch kvapaliny (plynu) je vo všetkých miestach kvapaliny (plynu) rovnaký.

Pascalov zákon hovorí o rovnomernom šírení sa tlaku v tekutinách. Platí aj pre plyny, napr. keď nafukujeme balón, napínajú sa steny balónu rovnomerne, tlaková sila pôsobí kolmo na steny vo všetkých miestach. Na platnosti Pascalovho zákona sú založené **hydraulické a pneumatické zariadenia**.

Hydraulické zariadenie tvoria dve nádoby tvaru valca s rôznymi prierezmi, spojené trubicou a naplnené kvapalinou, ktorá je uzavretá pohyblivými piestami (obr. 7.1).



Obr. 7.1. Schéma hydraulického zariadenia

Ak na piest s plochou S_1 pôsobí sila s veľkosťou F_1, vyvoláva táto sila v kvapaline vo všetkých miestach rovnaký tlak p o veľkosti $p = \frac{F_1}{S_1}$. Celková tlaková sila F_2, ktorou pôsobí kvapalina na piest s obsahom S_2 je $F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1}S_2$, pričom po matematickej úprave rovnice platí

$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}$$

Pomerne malou silou F_1 je možné pri vhodnom usporiadaní hydraulického, pneumatického zariadenia vyvolať veľkú tlakovú silu F_2. Toto sa využíva v praxi v hydraulických lisoch, na dvíhanie ťažkých bremien (hydraulické zdvíhacie kreslo u zubára, kde lekár pôsobí malou silou na piest s malou plochou a tlak kvapaliny potom vyvolá na väčšej ploche väčšiu silu, ktorá vyzdvihne kreslo aj s pacientom). Na rovnakom princípe fungujú pneumatické zariadenia, v ktorých sa tlak stlačeným plynom prenáša (otváranie dverí v autobuse, pneumatické buchary, pneumatické kladivá, atď.).

Tlak v kvapaline vyvolaný tiažovou silou

V tiažovom poli Zeme pôsobí na všetky častice kvapaliny tiažová sila. **Hydrostatická tlaková sila $\boldsymbol{F_h}$**, ktorou pôsobí kvapalina na dno a steny nádob, na telesá ponorené do kvapaliny zapríčinená tiažovou silou $F_h = G = mg$ je definovaná vzťahom

$$F_h = \rho S h g$$

Veľkosť hydrostatickej tlakovej sily, ktorou pôsobí kvapalina v hĺbke h na dno nádoby s obsahom S, je určená tiažou kvapaliny $\boldsymbol{G}$ v nádobe, kde ρ je hustota kvapaliny. Tlak, ktorý je vyvolaný tiažovou silou kvapaliny $p_h = \frac{F_h}{S} = \frac{\rho Shg}{S}$ a závisí od vzdialenosti od povrchu kvapaliny, sa nazýva **hydrostatický tlak** p_h. Pre ideálnu kvapalinu je hydrostatický tlak v hĺbke h pod povrchom nestlačiteľnej kvapaliny určený vzťahom

$$p_h = h\rho g$$

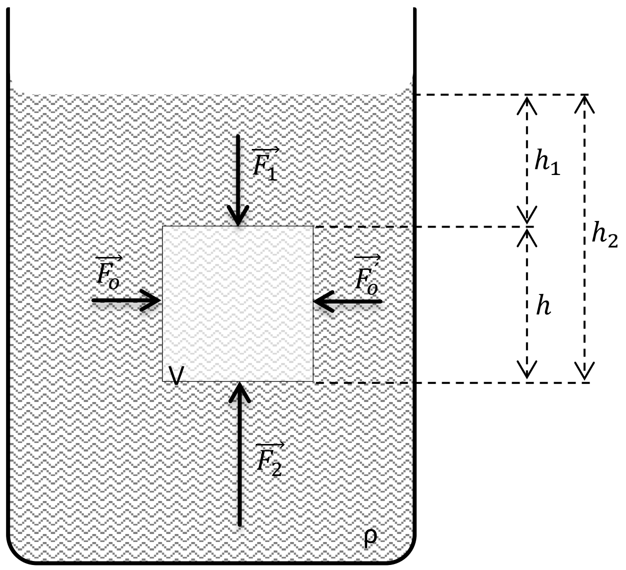
Hydrostatický tlak je priamo úmerný hustote kvapaliny ρ, hĺbke h miesta pod voľným povrchom kvapaliny a nezávisí od tvaru nádoby, v ktorej je kvapalina. Miesta, v ktorých je hydrostatický tlak rovnaký sa nazývajú **hladiny**, hladina s nulovým hydrostatickým tlakom je na voľnom povrchu kvapaliny a nazýva sa **voľná hladina**. Sila pôsobiaca na dno nádoby nezávisí od množstva kvapaliny v nádobe a je priamo úmerná plošnému obsahu dna a výške kvapaliny, tomuto javu sa hovorí hydrostatický paradox.

Tlak plynu vyvolaný tiažovou silou

Zem je obkolesená vzdušným obalom do výšky niekoľko 100 km, tzv. atmosférou. Všetky častice vzduchu sú tiažovou silou priťahované k povrchu Zeme, to znamená, že celá atmosféra je priťahovaná k Zemi a vykonáva spolu so Zemou rotačný pohyb. Výsledkom tohto pôsobenia je **atmosférická tlaková sila** $\boldsymbol{F_a}$ a tlak vzdušného obalu Zeme je **atmosférický tlak** p_a. Hustota vzduchu nie je konštantná veličina, mení sa s nadmorskou výškou. Atmosférický tlak s rastúcou nadmorskou výškou klesá, jeho údaje sa používajú v praxi pri tvorbe predpovede počasia. Na tieto účely sa zaviedol pojem **normálny atmosférický tlak** $p_n = 1{,}01325 \cdot 10^5 \mathrm{Pa}$. Na meranie tlaku sa používa tlakomer, barometer, aneroid alebo barograf.

Vztlaková sila v tekutinách

Nech je teleso tvaru kvádra s obsahom podstavy S a výškou h ponorené v kvapaline s hustotou ρ (obr. 7.2). Na každé miesto povrchu kvádra pôsobia hydrostatické tlakové



Obr. 7.2. Tlakové sily pôsobiace na teleso v kvapaline

sily. Tlakové sily $\boldsymbol{F_o}$, $\boldsymbol{F_o'}$ pôsobiace na bočné steny telesa sú rovnako veľké, opačne orientované, a teda sa navzájom rušia. Vo zvislom smere na vrchnú podstavu pôsobí tlaková sila $F_1 = \rho S h_1 g$, na dolnú podstavu pôsobí sila $F_2 = \rho S h_2 g$. Pre výslednicu síl pôsobiacich na teleso ponorené do kvapaliny platí

$$F_{vz} = F_2 - F_1 = \rho S h_2 g - \rho S h_1 g = \rho S g (h_2 - h_1) = \rho S h g$$

Táto výslednica sa nazýva **hydrostatická vztlaková sila** v prípade, ak kvapalina je voda. V prípade plynného prostredia, vzduchu sa definuje **aerostatická vztlaková sila**. Telesá ponorené do tekutiny sú nadľahčované **vztlakovou silou** $\boldsymbol{F_{vz}}$. Veľkosť vztlakovej sily je priamo úmerná hustote ρ tekutiny, v ktorej je teleso nadľahčované a objemu V telesa ponoreného v tekutine

$$F_{vz} = \rho V g$$

Súčin ρV predstavuje hmotnosť tekutiny rovnakého objemu ako je objem ponoreného telesa, súčin $\rho V g$ predstavuje veľkosť tiaže G tekutiny tohto objemu. Z toho vyplýva znenie Archimedovho zákona.

Archimedov zákon:

Teleso ponorené do tekutiny (celkom alebo čiastočne) je nadľahčované vztlakovou silou, ktorej veľkosť je rovná tiaži tekutiny rovnakého objemu, ako je objem ponoreného telesa alebo objem ponorenej časti telesa.

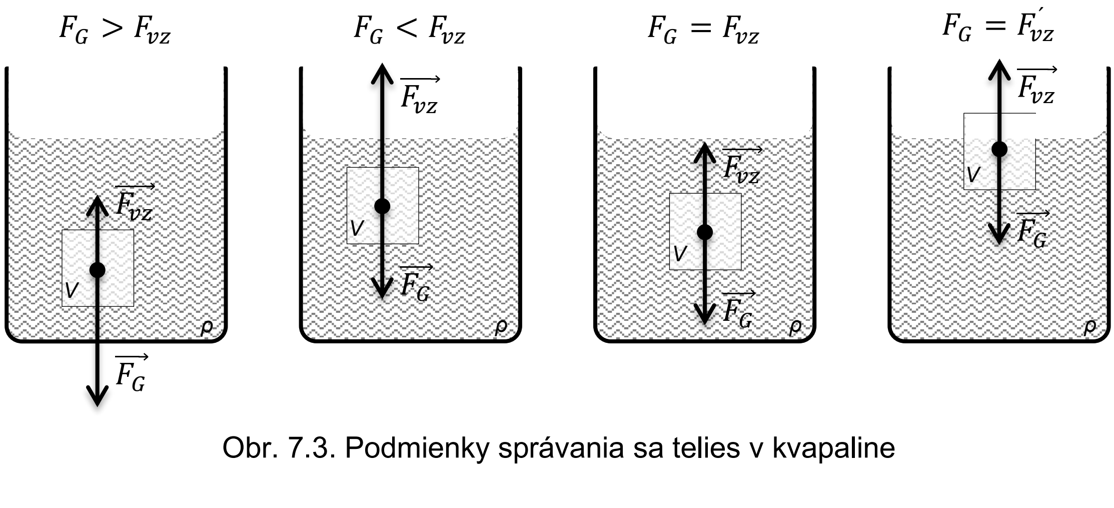
Hustota plynov je oveľa menšia ako hustota kvapalín, to znamená, že vztlaková sila pôsobiaca na telesá v plynoch je menšia ako vztlaková sila pôsobiaca v kvapalinách.

Podmienky plávania telies

Na každé teleso ponorené do kvapaliny pôsobí vztlaková sila $\boldsymbol{F_{vz}}$ v smere zvisle nahor a tiažová sila $\boldsymbol{F_G}$ v smere zvisle nadol (obr. 7.3). Pre veľkosť a výslednicu týchto síl platí

$$F_G = \rho_t V g, \qquad F_{vz} = \rho V g, \qquad F = |F_G - F_{vz}|$$

kde ρ_t je hustota ponoreného telesa, ρ hustota kvapaliny a V objem ponoreného telesa.



Obr. 7.3. Podmienky správania sa telies v kvapaline

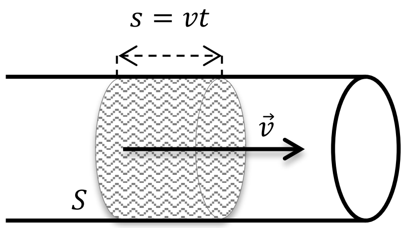
Ak je $\rho_t > \rho$, tak $F_G > F_{vz}$, výslednica síl $\boldsymbol{F}$ má smer zvisle nadol a **teleso klesá** ku dnu. Ak je $\rho_t < \rho$, tak $F_G < F_{vz}$, výslednica síl $\boldsymbol{F}$ má smer zvisle nahor a **teleso stúpa** k voľnej hladine kvapaliny. Ak je $\rho_t = \rho$, tak $F_G = F_{vz}$, výslednica síl $\boldsymbol{F} = 0$ a **teleso sa** v kvapaline voľne **vznáša**. V prípade, že sa teleso čiastočne vynorí, je tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$ v rovnováhe so vztlakovou silou $\boldsymbol{F}'_{vz}$, ktorá je rovná tiaži kvapaliny $\boldsymbol{G}'$ s rovnakým objemom ako je objem ponorenej časti telesa (obr. 7.3), hovoríme, že **teleso pláva** na voľnej hladine. V tomto prípade sa rozdiel síl $\boldsymbol{F}_{vz} - \boldsymbol{G}$ nazýva nosná sila telesa ponoreného do kvapaliny a používa sa pri ponorkách, pri stavbe pontónových mostov, atď.

7.2. Dynamika tekutín

Dynamika tekutín je rozdelená na dynamiku kvapalín, ktorá skúma zákony pohybu kvapalín a dynamiku plynov, ktorá skúma zákony pohybu plynov. Pri pohybe tekutín častice ľahko menia svoju polohu, ak ide o pohyb tekutín v jednom smere, hovoríme o **prúdení**. Prúdenie tekutiny sa nazýva **stacionárne** (ustálené), ak rýchlosť $\boldsymbol{v}$ prúdenia v ľubovoľnom mieste prúdu nezávisí od času a tlak v kvapaline v danom mieste je konštantný, v opačnom prípade ide o **nestacionárne** prúdenie. Dráhu prúdiacej tekutiny je možné znázorniť myslenou čiarou, tzv. **prúdnicou** alebo **prúdovou čiarou**, ktorej dotyčnica má v každom bode smer rýchlosti prúdenia. **Prúdovú trubicu** tvoria všetky prúdnice prechádzajúce plochou, ktorú krivka obopína.

Pri stacionárnom prúdení pretečie každým prierezom prúdovej trubice za rovnaký čas kvapalina rovnakého objemu (obr. 7.4). Objem kvapaliny, ktorá pretečie prierezom trubice za jednotku času, nazývame **objemový prietok** Q_V a je definovaný vzťahom

$$Q_V = Sv$$



Obr. 7.4. Objemový prietok kvapaliny

Jednotkou objemového toku Q_V je $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$. Objem vody, ktorý pretečie potrubím za daný čas, sa meria vodomerom, objem plynu plynomerom.

Ideálna kvapalina je dokonale nestlačiteľná a teda sa nemôže v žiadnom mieste trubice pri prúdení hromadiť. Preto pretečie každým prierezom trubice za jednotku času rovnaké množstvo kvapaliny. Platí zákon zachovania objemu prúdiacej kvapaliny, ktorý sa nazýva **rovnica spojitosti toku** (**rovnica kontinuity**) a matematicky ho možno vyjadriť vzťahom

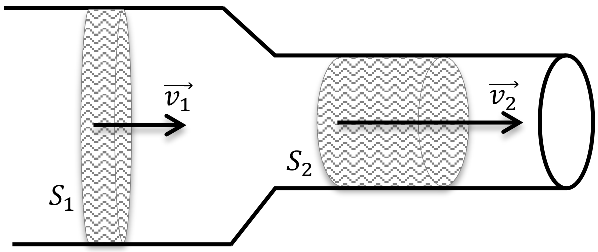
$$Sv = konšt.$$

Rovnica spojitosti toku:

Pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny je súčin obsahu prierezu prúdovej trubice S a rýchlosti prúdu kvapaliny v v každom mieste prúdovej trubice rovnaký.

Vo vodorovnej trubici s rôznymi prierezmi, ako vidieť na obr. 7.5, je v mieste väčšieho prierezu objemový prietok $Q_{V_1} = S_1 v_1$ a v mieste menšieho prierezu trubice objemový prietok $Q_{V_2} = S_2 v_2$. Z rovnice spojitosti toku vyplýva, že $Q_{V_1} = Q_{V_2}$ a po dosadení za objemový tok platí rovnica

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

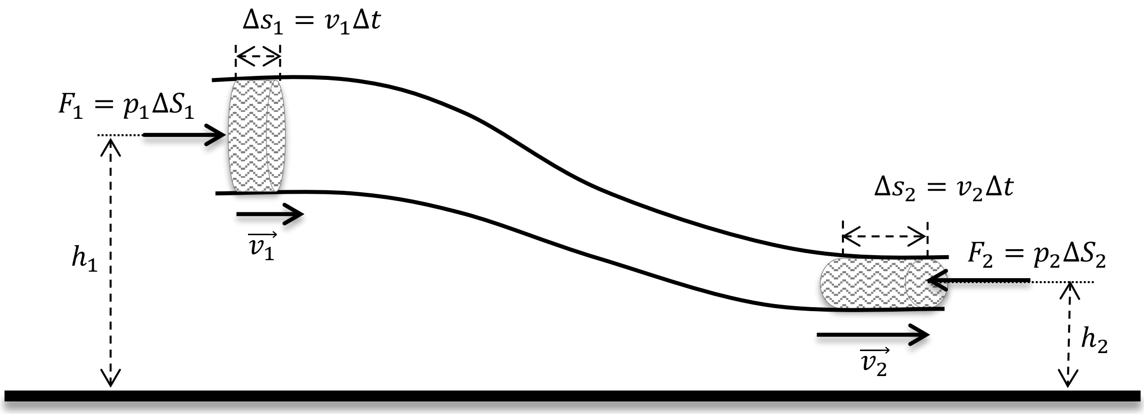


Obr. 7.5. Prúdová trubica s rôznymi prierezmi

Ak je $S_1 > S_2$, tak $v_1 < v_2$, a preto čím je menšia plocha prierezu prúdovej trubice, tým je väčšia rýchlosť prúdiacej kvapaliny. Napríklad v mieste, kde sa zužuje riečisko, prúdi voda vždy rýchlejšie ako na iných miestach rieky.

Bernoulliho rovnica

Nech prúdovou trubicou, ktorá sa zužuje v smere toku kvapaliny, prúdi kvapalina, tak rýchlosť prúdiacej kvapaliny v užšej časti trubice je väčšia ako rýchlosť v širšej časti trubice t. j. $S_1 > S_2$, $v_1 < v_2$ (obr. 7.6).



Obr. 7.6. Schéma pre tok kvapaliny trubicou s rôznymi prierezmi k odvodeniu Bernoulliho rovnice

So zmenou veľkosti rýchlosti súvisí aj zmena kinetickej energie prúdiacej kvapaliny. Práca vykonaná na kvapaline je rovná zmene jej kinetickej energie $W = \Delta E_k$, pričom platí $\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$. Keď predpokladáme, že kvapalina je nestlačiteľná s konštantnou hustotou ρ, je aj objemový tok konštantný, t. j. stav kvapaliny sa v priebehu deja nemení. Za časový interval Δt pretečie trubicou na ľavej strane objem kvapaliny ΔV a rovnaký objem kvapaliny trubicu na pravej strane opustí. Pre hmotnosť objemu kvapaliny, ktorá za časový interval Δt pretečie trubicou na pravej a ľavej strane platí $\Delta m = \rho\Delta V$. Dosadením do vyššie uvedenej rovnice, pre zmenu kinetickej energie bude platiť

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

Práca vykonaná na kvapaline je dvojakého druhu. Práca tiažovej sily potrebná na premiestnenie kvapaliny s hmotnosťou Δm zo vstupnej hladiny h_1 na výstupnú hladinu h_2 je rovná $W_{F_G} = -(\Delta m g h_2 - \Delta m g h_1) = -\rho\Delta V g(h_2 - h_1)$.

Práca vykonaná silou $\boldsymbol{F}$, ktorá posunie kvapalinu v trubici o Δs v smere pôsobenia sily je všeobecne definovaná ako $W = F\Delta s = pS\Delta s = p\Delta V$. Pri vstupe na ľavej strane trubice smeruje sila $\boldsymbol{F}_1$ v smere pohybu kvapaliny a pri výstupe je posunutie orientované opačným smerom ako je smer pôsobiacej sily. Pre celkovú prácu vykonanú okolitým tlakom potom platí $W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta V = -(p_2 - p_1)\Delta V$. Takže celkovú prácu vykonanú kvapalinou vyjadríme ako súčet jednotlivých príspevkov nasledovne

$$W = -\rho\Delta V g(h_2 - h_1) - (p_2 - p_1)\Delta V$$

Celková práca je rovná prírastku kinetickej energie $W = \Delta E_k$. Dosadením do rovnice za prácu kvapaliny a za zmenu kinetickej energie kvapaliny a následnou matematickou úpravou bude platiť

$$-\rho\Delta V g(h_2 - h_1) - (p_2 - p_1)\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

$$-\rho\Delta V g h_2 + \rho\Delta V g h_1 - \Delta V p_2 + \Delta V p_1 = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$$

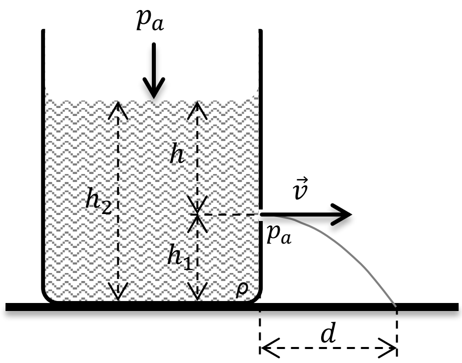
Ako vidieť, rovnica je len preformulovaním už nám známych vzťahov z mechaniky. Nasledujúca rovnica matematicky vyjadruje všeobecne Bernoulliho rovnicu, kde ρ je hustota kvapaliny, h je výška kvapaliny v uvažovanom mieste od zvolenej roviny a p je tlak kvapaliny v danom mieste prierezu trubice. **Bernoulliho rovnica** vyjadruje zákon zachovania mechanickej energie pre stacionárne prúdenie ideálnej kvapaliny a má tvar

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = konšt.$$

Pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny je súčet kinetickej energie, tiažovej potenciálnej energie objemovej jednotky ideálnej kvapaliny a tlaku, ktorý na ňu pôsobí pozdĺž prúdovej trubice, konštantný.

Z Bernoulliho rovnice vyplýva, že v zúženej časti trubice sa zvyšuje rýchlosť kvapaliny a znižuje sa tlak kvapaliny, tento jav sa v prípade, že kvapalina je voda nazýva hydrodynamický paradox. Na tomto princípe fungujú vodné vývevy, rozprašovače na kvety, mechanické rozprašovače voňaviek, atď.

Prostredníctvom Bernoulliho rovnice je možné určiť napríklad veľkosť rýchlosti v, ktorou vyteká kvapalina otvorom umiestneným v stene nádoby v hĺbke h pod voľnou hladinou kvapaliny (obr. 7.7).



Obr. 7.7. Vytekanie kvapaliny otvorom v stene nádoby

Potenciálna energia objemovej jednotky kvapaliny vo výške hladiny je $\rho g h_2$, vo výške otvoru je rovná $\rho g h_1$. Ak je prierez nádoby pomerne väčší ako je prierez otvoru, rýchlosť, akou klesajú častice kvapaliny pri hladine je oveľa menšia ako rýchlosť výtoku, t. j. kinetická energia objemovej jednotky hladiny je takmer nulová, v otvore je rovná $\frac{1}{2}\rho v^2$. Na hladinu kvapaliny pôsobí tiež okolitý vzduch atmosférickým tlakom p_a, v mieste otvoru je kvapalina priamo v styku s okolím a tlak na povrch kvapaliny je rovný atmosférickému tlaku p_a. Z platnosti zákona zachovania energie prúdiacej kvapaliny, t. j. z Bernoulliho rovnice platí

$$\rho g h_2 + p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_1 + p_a$$

Matematickou úpravou rovnice dostaneme **Torricelliho vzorec**

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2gh}$$

Tento vzorec vyjadruje, že **výtoková rýchlosť** ideálnej kvapaliny je taká veľká, akú by dosiahlo teleso voľne padajúce z výšky h v tiažovom poli Zeme. Pohyb častíc kvapaliny po opustení otvoru je totožný s pohybom telesa vodorovne hodeného rýchlosťou $\boldsymbol{v}$.

V dôsledku **vnútorného trenia** vznikajú v reálnych tekutinách **odporové sily** (hydrodynamické vo vode, aerodynamické vo vzduchu) pôsobiace proti smeru pohybu telesa v tekutine. Tento fyzikálny jav sa nazýva **odpor prostredia**.

Pre veľkosť odporovej sily, ktorou pôsobí prostredie na teleso pohybujúce sa v tomto prostredí, platí **Newtonov vzťah**

$$F = C\frac{1}{2}\rho S v^2$$

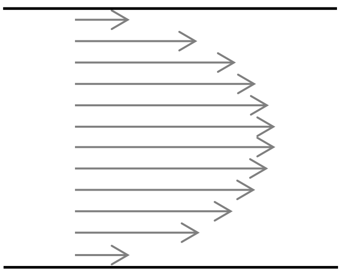
kde ρ je hustota tekutiny, C súčiniteľ odporu závislý od tvaru telesa, S je obsah prierezu telesa v rovine kolmej na smer pohybu, v je rýchlosť telesa vzhľadom na tekutinu.

Stokesov vzťah vyjadruje veľkosť odporovej sily prostredia pre malé rýchlosti telesa tvaru gule vo viskóznej kvapaline

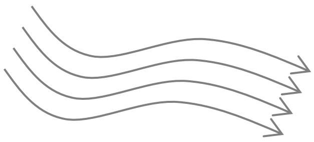
$$F = 6\pi\eta r v$$

kde η je dynamická viskozita, r polomer gule, v rýchlosť gule vzhľadom na tekutinu.

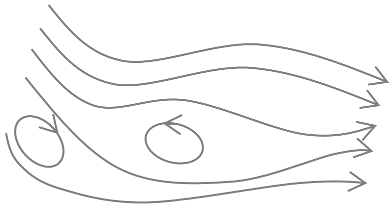
V prípade toku ideálnej kvapaliny je možné predpokladať, že rýchlosť kvapaliny je v celom priereze trubice rovnaká. Vrstva, ktorá sa bezprostredne dotýka steny nádoby pohybuje sa v dôsledku trenia medzi kvapalinou a stenou nádoby najmenšou rýchlosťou (alebo je v pokoji). Po tejto vrstve sa posúva malou rýchlosťou druhá vrstva a po nej ďalšie a ďalšie vrstvy kvapaliny s postupne zvyšujúcou sa rýchlosťou. Najväčšiu rýchlosť majú častice kvapaliny, ktoré prechádzajú stredom prierezu trubice (obr. 7.8). Tento jav je dôsledkom toho, že trenie medzi jednotlivými vrstvami kvapaliny je menšie ako trenie medzi kvapalinou a stenou nádoby.



Obr. 7.8. Rozloženie rýchlosti v prúdiacej kvapaline



Obr. 7.9. Laminárne prúdenie



Obr. 7.10. Turbulentné prúdenie

Pri malých rýchlostiach sa prúdenie tekutiny nazýva **laminárne** (obr. 7.9), tvar prúdnic je časovo stály. Pri väčších rýchlostiach dochádza ku vzniku vírov, prúdenie je **turbulentné** (obr. 7.10), prúdnice sa rýchlo a nepravidelne menia.

Obtekanie telesa je premiestňovanie jednotlivých častíc tekutiny vzhľadom k povrchu telesa. Voda v rieke obteká piliere mostov, prúdiaci vzduch obteká telesá na povrchu Zeme, parašutista sa pohybuje v pokojnom vzduchu. Je jedno, či sa pohybuje tekutina vzhľadom k telesu, alebo teleso vzhľadom k tekutine, dôležitý je relatívny pohyb tekutiny a telesa.

Úlohy ku kapitole 7

1. V nádobe tvaru hranola je na jednej bočnej stene kruhový otvor uzavretý zátkou. Určte veľkosť sily pôsobiacej na zátku, ak stred kruhového otvoru o priemere 40 cm sa nachádza vo výške h_1 = 50 cm nad dnom nádoby. Nádoba je naplnená vodou do výšky h_2 = 1 m nad dnom. *[F = 616,38* N*]*
2. Kvapalina je uzavretá v nádobe piestom. Na piest, ktorý má plošný obsah S = 16 cm^2 pôsobí sila F = 550 N. Určte, aký veľký tlak p vyvolá sila v kvapaline. *[p = 343,75* kPa*]*
3. Hydraulický zdvihák v autoservise má zdvihnúť terénny automobil s hmotnosťou 2950 kg. Akou najmenšou silou treba pôsobiť na primárny piest pri zdvíhaní tohto automobilu? Priemer primárneho piesta je 10 cm a priemer sekundárneho piesta je 100 cm. Automobil sme zdvihli o 50 cm za čas 3 minúty. *[F = 290* N*]*
4. Valce hydraulického lisu majú plošné obsahy prierezov S_1 = 10 cm^2, S_2 = 85 cm^2. Určte, aká veľká tlaková sila pôsobí na veľký piest, ak na malý piest pôsobí sila F_1 = 100 N. Ak sa malý piest pôsobením sily posunie po dráhe d_1 = 12 cm, o koľko sa posunie veľký piest? *[F_2 = 850* N*; d_2 = 0,014* m*]*
5. Sklenený pohár tvaru valca vysoký 15 cm s plošným obsahom prierezu 30 cm^2 je naplnený po okraj vodou. Pohár je prikrytý listom papiera a otočený hore dnom. Akou veľkou silou je papier pritláčaný k poháru, ak atmosférický tlak je 0,1013 MPa a hustota vody je 10^3 kg.m^{-3}? *[F = 300* N*]*
6. Najhlbšie miesto zemského povrchu je Mariánska priekopa v Tichom oceáne a jej hĺbka je 10 994 m. Ak uvažujeme, že priemerná hustota morskej vody je $1{,}025.10^3$ kg.m^{-3}, aký bude tlak v tejto hĺbke. *[p = 111* MPa*]*
7. Na vrchole hory turista nameral tlak $9{,}45.10^4$ Pa, pričom pred výstupom na úpätí hory nameral tlak $1{,}02.10^5$ Pa. Určte výškový rozdiel pri výstupe. *[Δh = 593* m*]*
8. Loptičku na stolný tenis ponoríme do vody a chceme ju udržať pod vodou. Akou silou musíme pôsobiť na loptičku aby sme ju udržali pod vodou? Priemer loptičky je 4 cm. *[F = 0,32* N*]*
9. Na vydvihnutie telesa vo vode v bazéne zo dna na úroveň o 0,5 m vyššiu je potrebná práca 18 J. Na rovnaké premiestnenie toho istého telesa v prázdnom bazéne je potrebná práca 24 J. Akou veľkou silou nadľahčuje voda kameň? *[F = 12* N*]*
10. Určte, aká časť ľadovca plávajúca na hladine mora vyčnieva. Uvažujme, že priemerná hustota morskej vody je 1025 kg.m^{-3} a hustota ľadovca je 922 kg.m^{-3}. *[približne 0,1 z objemu ľadovca]*
11. Plošný obsah priečneho prierezu lode vo výške hladiny vody je 4000 m^2, priemerná hustota morskej vody je 1025 kg.m^{-3}. Naložením nákladu sa ponor lode zväčšil o 2 m. Aký veľký náklad bol naložený na lodi? *[m = 8 200* t*]*

12. Určte, približne akou veľkou vztlakovou silou je nadľahčované vaše telo vo vzduchu. Hustota vzduchu ρ = 1,29 kg.m^{-3}. *[$F_{vz} = m\rho g/\rho_t$]*

13. Ľadová kryha s hmotnosťou 180 kg a hustotou 900 kg.m^{-3} pláva vo vode s hustotou 1000 kg.m^{-3}. Akú najmenšiu hmotnosť musí mať teleso, ktoré treba položiť na stred kryhy, aby sa celá ponorila do vody? *[m = 20* kg*]*

14. Balón s hmotnosťou m = 680 kg, objemom V = 880 m^3 stúpa vo vzduchu zvislo nahor. Do akej výšky vystúpi balón za prvých 10 sekúnd, keď sa v tomto časovom intervale pohyboval rovnomerne zrýchleným pohybom? Hustota vzduchu je 1,29 kg.m^{-3}. *[h = 328,35* m*]*

15. Cez potrubie s priemerom d = 2,5 cm prúdi voda rýchlosťou v = 80 cm.s^{-1}. Koľko litrov vody pretečie cez potrubie za 1 min? *[V = 23,55* l*]*

16. Vypočítajte objemový prietok vody v trubici s priemerom 0,18 m, ak voda prúdi rýchlosťou 0,25 m.s^{-1}. *[Q_V = 6,36. 10^{-3}* m^3.s^{-1}*]*

17. Záhradná hadica pozostáva z hadice s priemerom d_1 = 2,5 cm, na ktorú je pripojená pomocou redukcie hadica s priemerom d_2 = 1,9 cm. Sud s objemom V = 180 l naplníme touto hadicou za čas t = 15 min. Akou veľkou rýchlosťou prúdi voda v širšej a užšej časti hadice? *[v širšej časti v_1 = 0,4* m.s^{-1}*; v užšej časti v_2 = 0,7* m.s^{-1}*]*

18. Čerpadlo načerpá za minútu 300 l vody. Prívodové potrubie k čerpadlu má priemer 8 cm. Výtokovým potrubím prúdi voda rýchlosťou 8 ms^{-1}. Vypočítajte rýchlosť vody v prívodovom potrubí a priemer výtokového potrubia. *[v = 0,99* m.s^{-1}*; d = 0,03* m*]*

19. Voda v ústrednom kúrení prúdi tak, že na prízemí vstupuje do rúrky s priemerom 4 cm rýchlosťou 0,5 m.s^{-1} a je pod tlakom 3.10^5 Pa. Určte rýchlosť a tlak vody v rúrke s priemerom 2,6 cm na druhom poschodí, ktoré sa nachádza o 5 m vyššie. *[v = 1,2* m.s^{-1}*; p = 2,5.10^5* Pa*]*

20. Vodná elektráreň pracuje na princípe využitia energie vody, ktorá padá na lopatky turbíny z výšky 4,5 m. Určte objemový prietok, ak bude mať turbína s účinnosťou 75 % výkon 610 kW. Hustota vody je 1000 kg.m^{-3}. *[Q_V = 18,42* m^3.s^{-1}*]*

21. Injekčná striekačka má plošný obsah piesta S_1 = 1,2 cm^2 a obsah otvoru striekačky je S_2 = 1 mm^2. Ako dlho bude vytekať voda zo striekačky, ktorá je uložená vo vodorovnej rovine, ak na piest bude pôsobiť sila F = 4,9 N a ak posunutie piesta účinkom sily bude Δl = 4 cm? Vnútorné trenie vody zanedbajte. *[t = 0,53* s*]*

22. Určte rýchlosť vody vytekajúcej z otvoru v stene nádoby, keď sa hladina vody udržuje v konštantnej výške h = 0,75 m. *[v = 3,84* m.s^{-1}*]*

23. Vo valcovej nádobe sú dva otvory vo výškach h_1 a h_2 nad dnom. V akej výške musíme udržiavať hladinu kvapaliny v nádobe, aby z obidvoch otvorov dostrekovala kvapalina (na úrovni dna nádoby) do rovnakej vzdialenosti? *[$h = h_1 + h_2$]*

24. Z vodnej nádrže cez otvor s priemerom 4 cm vyteká 40 l vody za čas 10 s. Voľná hladina vody ostáva konštantná. Určte výšku vodnej hladiny od stredu otvoru.

[*h = 0, 52* m]

25. Auto prekonáva silu odporu vzduchu pri konštantnej rýchlosti v = 22 $m.s^{-1}$ vzhľadom na vzduch v pokoji. Aký je vynaložený stratový výkon motora auta? Plošný obsah čelnej plochy auta kolmej na smer pohybu je S = 4 m^2, súčiniteľ odporu C = 0,55 a hustota vzduchu ρ = 1,29 $kg.m^{-3}$. [*P = 15,11* kW]

8. Molekulová fyzika a termodynamika

8.1. Základné vlastnosti látok

Látky sú zložené z častíc veľmi malých rozmerov, ako sú atómy (rozmery atómov sú rádovo $10^{-10}\mathrm{m}$), molekuly, ióny. Počet častíc, z ktorých sú látky zložené je veľmi veľký, a keďže sa správanie rozsiahlych súborov atómov navonok javí chaotické, náhodné, na popis sa používajú zákony štatistickej fyziky a termodynamiky. Pri takomto opise sa pre množstvo látky zaviedla jednotka mól (mol). $1\ \mathrm{mol}$ je také množstvo látky, ktoré má rovnaký počet častíc ako je počet atómov v 12 g uhlíka izotopu ${}^{12}_{6}C$.

Ak teleso danej látky obsahuje N častíc, **látkové množstvo** n tejto látky je definované vťahom

$$n = \frac{N}{N_A}$$

kde $N_A \cong 6{,}022.\,10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$ je Avogadrova konštanta. Jednotka látkového množstva je mól (mol).

Relatívna atómová hmotnosť je definovaná vzťahom

$$A_r = \frac{m_a}{m_u}$$

kde m_a je pokojová hmotnosť atómu a m_u je atómová hmotnostná konštatnta $m_u \cong 1{,}66.\,10^{-27}\mathrm{kg}$, čo je $1/12$ pokojovej hmotnosti atómu nuklidu ${}^{12}_{6}C$.

Relatívna molekulová hmotnosť je definovaná vzťahom

$$M_r = \frac{m_m}{m_u}$$

kde m_m je pokojová hmotnosť molekuly.

Mólová hmotnosť M_m je definovaná vzťahom

$$M_m = \frac{m}{n}$$

kde m je hmotnosť telesa z chemicky rovnorodej látky.

Mólový objem V_m telesa z chemicky rovnorodej látky je definovaný vzťahom

$$V_m = \frac{V}{n}$$

kde V je objem telesa za konkrétnych fyzikálnych podmienok.

Priemerná energia pripadajúca na jednu časticu charakterizuje teplotný stav látky, priamo súvisí s parametrom označovaným ako teplota.

Teplota je skalárna fyzikálna veličina charakterizujúca tepelný stav látok. Látky, ktoré sú pri vzájomnom dotyku v rovnovážnom stave, t. j. majú rovnakú teplotu, sú v stave termodynamickej rovnováhy. Ak telesá pri uvedení do vzájomného dotyku menia svoje pôvodné rovnovážne stavy, potom mali telesá na začiatku deja rôzne teploty. Na určovanie teplôt telies sa používajú rôzne **teplotné stupnice:** Celziova, Kelvinova, Réaumurova, Fahrenheitova.

Celziova teplotná stupnica má dva základné body. Bod $0°\mathrm{C}$ je rovnovážny stav vody a jej ľadu za normálneho tlaku 101 325 Pa a bod $100°\mathrm{C}$ je rovnovážny stav vody a jej nasýtenej pary za normálneho tlaku. Medzi týmito bodmi je stupnica rozdelená na 100 rovnakých dielikov, kde jeden dielik zodpovedá jednému **celziovému stupňu** ($t = 1°\mathrm{C}$).

Termodynamická teplotná stupnica (**Kelvinova stupnica**) je základná teplotná stupnica. Bola definovaná z druhého termodynamického zákona pomocou účinnosti vratne pracujúceho tepelného stroja. Teplota vyjadrená v termodynamickej teplotnej stupnici sa nazýva **termodynamická teplota** T a jej jednotkou je kelvin (K). Termodynamická teplotná stupnica má jednu základnú teplotu s názvom **teplota trojného bodu vody** a hodnotou $T_{tr} = 273{,}16\ \mathrm{K}$, $t_{tr} = 0{,}01°\mathrm{C}$. Je to teplota rovnovážneho stavu voda, jej nasýtená para a ľad.

Celziová teplota t je definovaná pomocou termodynamickej teploty T vzťahom

$$t = (\{T\} - 273{,}15)°\mathrm{C}$$

kde $\{T\}$ je číselná hodnota termodynamickej teploty. Pri prevode Celziovej teploty t na termodynamickú teplotu T platí

$$T = (\{t\} + 273{,}15)\mathrm{K}$$

Termodynamická teplota ľubovoľnej sústavy môže nadobudnúť hodnotu blízku $0\ \mathrm{K}$, ale nemôže ju nikdy dosiahnuť, ako vyplýva z tretieho termodynamického zákona. Pri tejto teplote, ktorá je začiatkom termodynamickej teplotnej stupnice, nadobúda kinetická energia častíc sústavy minimálne hodnoty, ale nie je nulová. V blízkosti teploty $0\ \mathrm{K}$ sa výrazne menia vlastnosti látok napríklad elektrická vodivosť (nastáva supravodivosť), viskozita kvapalín (supertekutosť).

8.2. Vnútorná energia, práca a teplo

Vnútorná energia telesa U je definovaná súčtom celkovej kinetickej energie neusporiadane pohybujúcich sa častíc telesa (molekúl, atómov, iónov) E_{k_i} a celkovej potenciálnej energie vzájomnej polohy týchto častíc E_{p_i} a pre N častíc platí vzťah

$$U = \sum_{i=1}^{N} \left(E_{k_i} + E_{p_i}\right)$$

Zmena vnútornej energie môže nastať tepelnou výmenou alebo konaním práce. Teplo je tá časť energie, ktorá sa prenáša vzájomným pôsobením medzi atómami, molekulami. Dej, pri ktorom si neusporiadane sa pohybujúce častice telesa (sústavy) rôznej teploty odovzdávajú časť svojej energie, sa nazýva **tepelná výmena**.

Teplo Q je fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje mieru zmeny vnútornej energie telesa (sústavy). Teplo (tepelná energia) môže prechádzať z jedného telesa na druhé, alebo z jedného miesta prostredia na druhé, pričom sa pohyb tepla prejaví zmenou teploty. Ak teleso prijme teplo tepelnou výmenou, narastie jeho vnútorná energia a zvýši sa teplota telesa. Jednotkou tepla je joule (J).

Fyzikálna veličina, ktorá určuje množstvo tepla Q dodaného (odobratého) telesu, aby sa zvýšila (znížila) jeho teplota o jeden kelvin (respektíve o jeden stupeň celzia), sa nazýva **tepelná kapacita** C definovaná vzťahom

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Jednotkou tepelnej kapacity je $\mathrm{J.K^{-1}}$. **Hmotnostná tepelná kapacita** c udáva množstvo tepla, ktoré je potrebné na ohriatie (ochladenie) jedného kilogramu látky o jeden kelvin (respektíve o jeden stupeň celzia) a je definovaná vzťahom

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{C}{m}$$

Q je teplo dodané (odovzdané), m je hmotnosť telesa, C tepelná kapacita a ΔT je odpovedajúca zmena teploty. Jednotkou hmotnostnej tepelnej kapacity je $\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$. Hmotnostná tepelná kapacita je charakteristická pre danú látku a pre rôzne látky a rôzne skupenstvá má rôzne hodnoty. Pri pevných a kvapalných látkach je funkciou teploty. Pri plynoch závisí od teploty, tlaku a podmienok, počas ktorých plyn prijíma teplo. Podľa toho rozlišujeme hmotnostnú tepelnú kapacitu za stáleho tlaku c_p a za stáleho objemu c_V. Ak je hmotnostná tepelná kapacita konštantná v danom intervale teploty, môžeme písať pre množstvo dodaného alebo prijatého tepla Q vzťah

$$Q = mc\Delta T$$

Kalorimetria je časť vedy, ktorá sa zaoberá meraním tepla pri chemických reakciách alebo fyzikálnych zmenách látok uskutočňovaných v kalorimetri. Zmiešavací **kalorimeter** je tepelne izolovaná nádoba s miešačkou a teplomerom, v ktorej je možné uskutočňovať tepelnú výmenu medzi látkami pri súčasnom meraní ich teplôt. Tepelné vlastnosti kalorimetra sa charakterizujú tepelnou kapacitou kalorimetra C_k.

Do tepelne izolovanej nádoby s kvapalinou s hmotnosťou m_2, hmotnostnou tepelnou kapacitou c_2 vložíme teleso s hmotnosťou m_1, hmotnostnou tepelnou kapacitou c_1. Predpokladom je, že látka, z ktorej je vyrobené teleso chemicky nereaguje s kvapalinou a pri tepelnej výmene medzi telesom a kvapalinou nenastáva zmena skupenstva. Tepelná výmena prebieha tak dlho až nastane rovnovážny stav, pri ktorom sa teploty telesa a kvapaliny vyrovnajú na výslednú teplotu T. Celková vnútorná energia v tepelne izolovanej sústave je konštantná a zo zákona zachovania energie vyplýva, že úbytok vnútornej energie telesa je rovnaký ako prírastok vnútornej energie kvapaliny, t. j. $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ a platí

$$m_1 c_1 (T_1 - T) = m_2 c_2 (T - T_2)$$

Všeobecne možno uvedenú **kalorimetrickú rovnicu** formulovať pre izolovanú sústavu nasledovne:

Teplo, ktoré odovzdá jedno teleso (teplejšie) druhému, je rovnaké ako teplo, ktoré druhé teleso (chladnejšie) príjme od prvého.

Ak tuhé telesá, alebo kvapaliny skúmame v teplotnom intervale, v ktorom je hmotnostná tepelná kapacita konštantná, kalorimetrickú rovnicu je možné vyjadriť všeobecne nasledovne

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{N} (m_i c_i \Delta T_i)$$

kde ΔQ je množstvo dodaného, alebo odovzdaného tepla telies, medzi ktorými dochádza k tepelnej výmene.

Prenos (šírenie) tepla je prenos vnútornej energie tepelnou výmenou z miest s vyššou teplotou do miest s nižšou teplotou a uskutočňuje sa vedením, prúdením a sálaním. **Vedenie tepla** (kondukcia) je prenos vnútornej energie tepelnou výmenou medzi časťami telesa rôznej teploty, pričom je teleso v pokoji. **Prúdenie tepla** (konvekcia) je prenos vnútornej energie pohybujúcou sa tekutinou z miest s vyššou teplotou do miesta s nižšou teplotou. **Sálanie (žiarenie) tepla** je prenos vnútornej energie z teplejšieho telesa na chladnejšie v prípade, že obe telesá sa navzájom nedotýkajú. Napríklad tepelná energia vychádza z jedného telesa (Slnko) vo forme žiarenia a v druhom telese (Zem) sa toto žiarenie pohltí, mení sa jeho energia zasa na tepelnú.

8.3. Základy termodynamiky

Termodynamika sa zaoberá vnútornou energiou systému, **tepelnou energiou**.

Prvý termodynamický zákon (prvá veta termodynamická) vyjadruje zákon zachovania energie pre mechanické a tepelné deje:

Prírastok vnútornej energie sústavy ΔU je rovný súčtu práce W vykonanej okolitými telesami pôsobiacimi na sústavu silami a tepla Q odovzdaného okolitými telesami sústave

$$\Delta U = Q + W$$

Alebo možno napísať, že $Q = \Delta U + W^{´}$, kde $W^{´}$ je práca, ktorú vykoná sústava $W^{´} = -W$.

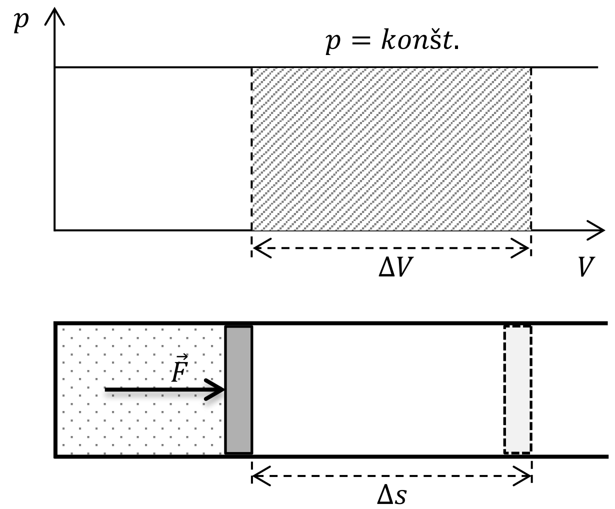
Prvý termodynamický zákon hovorí, že teplo dodané nejakej sústave sa spotrebuje na zvýšenie jej vnútornej energie a na prácu, ktorú táto sústava (napríklad plyn) vykoná. To znamená, že nie je možné zostrojiť také zariadenie, ktoré by trvalo konalo prácu bez dodávania energie, tzv. perpetuum mobile I. druhu. Ale zmena vnútornej energie ΔU môže byť vyvolaná tepelnou výmenou, konaním práce, alebo konaním práce a súčasnou tepelnou výmenou.

Práca plynu

Prácou plynu $W´$ nazývame mechanickú prácu, ktorú konajú tlakové sily plynu. Ak tlak plynu je konštantný, plyn na piest s obsahom S pôsobí silou $F = pS$ a piest sa pôsobením tejto sily posunie po dráhe s. Ak bude tlak plynu konštantný aj sila, ktorou pôsobí plyn na piest bude konštantná. Veľkosť práce závisí od tlaku plynu p a zmeny objemu plynu $\Delta V = V_2 - V_2$, pričom je zmena objemu tiež určená ako $\Delta V = S\Delta s$ (obr. 8.1). Pre prácu plynu pri izobarickom deji platí

$$\Delta W^{´} = F\Delta s = pS\Delta s = p\Delta V$$

Veľkosť práce plynu možno určiť aj pomocou **pracovného diagramu**, t. j. graf vyjadrujúci závislosť tlaku a objemu plynu (obr. 8.1).



Obr. 8.1. Práca plynu, pracovný diagram pre izobarický dej

Pri izotermickom deji ($T = konšt.$) je práca rovná súčtu $W = p_1\Delta V + p_2\Delta V + \cdots + p_n\Delta V$. Práca, ktorú koná plyn pri izotermickej expanzii (rozpínaní plynu), je práca konaná proti vonkajším silám na úkor vnútornej energie plynu. Tepelná energia sa premieňa na mechanickú tak, že neusporiadaný pohyb molekúl plynu sa premieňa na pohyb piesta, ktorý býva súčasťou zariadení a poháňa nejakú súčiastku zariadenia. Takéto zariadenia sa nazývajú tepelné motory, stroje. V tepelnom stroji sa prostredníctvom periodicky sa opakujúceho kruhového deja premieňa vnútorná energia pracovnej látky na mechanickú prácu.

Tepelné deje v plynoch

Ideálny plyn má nasledujúce vlastnosti. Rozmery molekúl ideálneho plynu sú zanedbateľne malé v porovnaní s ich vzdialenosťou. Molekuly na seba navzájom pôsobia iba počas zrážok, inak nie, t. j. neexistujú medzi nimi príťažlivé sily a vzájomne zrážky sú dokonale pružné.

Stavové premeny ideálneho plynu sú základom tepelných zariadení a niektoré premeny sú spojené s prácou, ktorú koná plyn pri expanzii alebo vonkajšie sily pri kompresii. Plyn v rovnovážnom stave je charakterizovaný **stavovými veličinami:** termodynamická teplota T, tlak p, objem V, hmotnosť m, látkové množstvo n alebo počet molekúl N. Vzájomný vzťah medzi stavovými veličinami ideálneho plynu vyjadruje **stavová rovnica ideálneho plynu**

$$pV = NkT$$

$$pV = nR_mT$$

kde $R_m = 8{,}314.103\ \mathrm{J.K^{-1}.kmol^{-1}}$ je mólová plynová konštanta, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\mathrm{J.K^{-1}}$ je Boltzmanova konštanta.

Na grafické znázornenie vzájomnej závislosti stavových veličín sa používa **stavový diagram** (nazývaný pV diagram). Stavová rovnica ideálneho plynu sa dá použiť približne aj pre reálne plyny pri nízkom tlaku a vyššej teplote plynu. Pri stavovej zmene ideálneho plynu konštantnej hmotnosti m platí stavová rovnica v tvare

$$\frac{pV}{T} = konšt.$$

Ak p_1, p_2 sú tlaky plynu, V_1, V_2 objemy plynu, T_1, T_2 termodynamické teploty v jednotlivých stavoch, potom pre dva stavy plynu platí

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

Izotermický dej je dej, pri ktorom nastáva zmena stavu daného množstva plynu pri stálej teplote $T = konšt., T_1 = T_2$, a platí $p_1V_1 = p_2V_2$. Grafom závislosti pri izotermickom deji je izoterma. Stavovú zmenu daného množstva ideálneho plynu pre izotermický dej vyjadruje **Boylov-Mariottov zákon:**

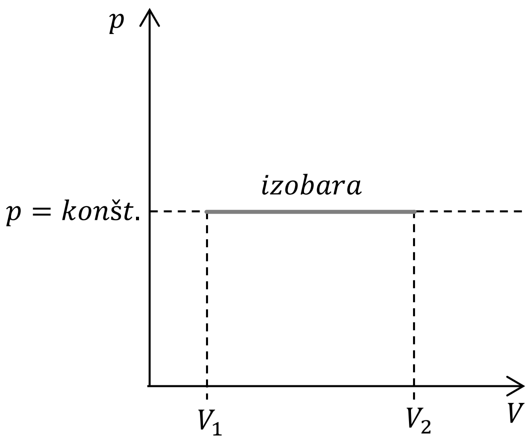
$$pV = konšt.$$

Vnútorná energia plynu sa môže meniť konaním práce alebo tepelnou výmenou, pričom platí prvý termodynamický zákon $\Delta U = Q + W$. Pri izotermickom deji je $\Delta U = 0\ \mathrm{J}$ a teplo Q prijaté ideálnym plynom pri izotermickom deji je rovné práci $W^{\prime}$, ktorú plyn pri tomto deji vykoná, t. j. $Q = W^{\prime}$.

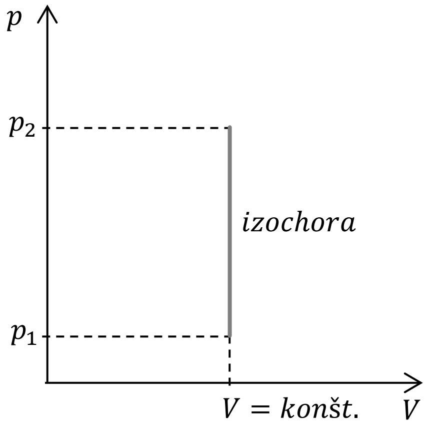
Izobarický dej je dej, pri ktorom nastáva zmena stavu daného množstva plynu pri stálom tlaku $p = konšt., p_1 = p_2$, a platí $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$. Grafom závislosti tlaku a objemu pri izotermickom deji je izobara (obr. 8.2). Stavovú zmenu daného množstva ideálneho plynu pre izobarický dej vyjadruje **Gay-Lussacov zákon:**

$$\frac{V}{T} = konšt.$$

Teplo Q prijaté ideálnym plynom pri izobarickom deji je rovné súčtu prírastku jeho vnútornej energie ΔU a práce, ktorú vykoná plyn, t. j. $Q = \Delta U + W^{´}$.



Obr. 8.2. pV diagram pre izobarický dej



Obr. 8.3. pV diagram pre izochorický dej

Izochorický dej, je dej, pri ktorom zmena stavu daného množstva plynu nastáva pri stálom objeme $V = konšt.$, $V_1 = V_2$ a platí $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$. Grafom závislosti objemu a tlaku pri izochorickom deji je izochora (obr. 8.3). **Charlesov zákon** vyjadruje stavovú zmenu daného množstva ideálneho plynu pre izochorický dej

$$\frac{p}{T} = konšt.$$

Pri izochorickom deji plyn nekoná prácu $W^{´} = 0\,\mathrm{J}$. Teplo prijaté ideálnym plynom pri izochorickom deji je rovné prírastku vnútornej energie, t. j. $\Delta U = Q = c_V m \Delta T$, kde c_V je hmotnostná tepelná kapacita plynu pri konštantnom objeme a ΔT je zmena teploty.

Adiabatický dej charakterizuje zmenu stavu daného množstva plynu pri tepelnej izolácii plynu ($Q = 0\,\mathrm{J}$), kde κ je Poissonova konštanta a platí rovnica

$$pV^{\kappa} = konšt.$$

Potom z prvého termodynamického zákona platí, že $\Delta U = W$, čo znamená, že pri adiabatickom deji je sústava izolovaná a koná sa práca na úkor vnútornej energie plynu. Pri adiabatickej expanzii sa plyn ochladzuje, pri kompresii sa plyn ohrieva. Poissonova konštanta vyjadruje pomer tepelnej kapacity plynu pri konštantnom tlaku C_p a tepelnej kapacity plynu pri konštantnom objeme C_V pre dané látkové množstvo plynu

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

Van der Waalsova stavová rovnica je jednou zo stavových rovníc platiaca pre reálne plyny, v ktorej sa berie ohľad na vplyv vlastného objemu molekúl plynu a vplyv síl pôsobiacich medzi molekulami plynu a má tvar

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

V objem reálneho plynu, p je tlak reálneho plynu, T je termodynamická teplota reálneho plynu, n je látkové množstvo, R je mólová plynová konštanta, a, b sú konštanty závislé od druhu plynu.

Kruhový dej

Pri kruhovom deji je sústava po skončení deja opäť v začiatočnej, t. j. východiskovej polohe. Celková zmena vnútornej energie pracovnej látky po ukončení jedného cuklu je nulová $\Delta U = 0\ \mathrm{J}$. Teleso, od ktorého pri kruhovom deji pracovná látka prijme teplo Q_1 sa nazýva ohrievač a teleso, ktorému odovzdá teplo Q_2 sa nazýva chladič, pričom celkové teplo prijaté pracovnou látkou je $Q = Q_1 - Q_2$.

Carnotov vratný kruhový dej prebieha v cykle štyroch za sebou nasledujúcich dejov (izotermické rozpínanie, adiabatické rozpínanie, izotermické stlačenie, adiabatické stlačenie). V priebehu jedného cyklu pracovná látka odoberie ohrievaču teplo Q_1 a chladiču odovzdá teplo Q_2, pričom vykoná prácu $W' = Q_1 - Q_2$. Podiel plynom vykonanej práce W' a prijatého tepla Q definuje fyzikálnu veličinu **účinnosť deja** η

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Q_1 teplo prijaté pracovnou látkou počas jedného cyklu, Q_2 teplo odovzdané chladiču, T_1 teplota ohrievača, T_2 teplota chladiča. Napríklad pracovnou látkou v parnom stroji je vodná para, parný stroj má veľmi nízku účinnosť (12 %), parná turbína 25 %. Medzi tepelné stroje sa radí zážihový, vznetový motor.

Každý cyklicky pracujúci stroj od ohrievača prijíma teplo Q_1, chladiču odovzdáva teplo Q_2 ($Q_2 < Q_1$) a vykoná prácu $W' = Q_1 - Q_2$. Čiže z prijatého tepla od ohrievača sa dá využiť iba časť na konanie práce a zvyšok tepla sa odvedie chladiču. Túto skutočnosť popisuje **druhý termodynamický zákon** (druhá termodynamická veta):

Nie je možné zostrojiť periodicky pracujúci tepelný stroj, ktorý by iba prijímal teplo od určitého telesa (stroja) a vykonával rovnako veľkú prácu.

Možno ho formulovať aj nasledovne: **Pri tepelnej výmene teleso s vyššou teplotou nemôže prijímať samovoľne teplo od telesa z nižšou teplotou.**

Tretí termodynamický zákon tvrdí, že **nie je možné dosiahnuť teplotu** $0K$.

Zmena skupenstva látok

Látky sa môžu vyskytovať v pevnom, kvapalnom, plynnom skupenstve a v stave plazmy. Pevné látky, kvapaliny a plyny sa skladajú z veľkého počtu častíc. Sústava v rovnovážnom stave vo všetkých častiach s rovnakými fyzikálnym a chemickým zložením sa nazýva fáza (napríklad ľad, voda, vodná para). **Fázová premena** (zmena skupenstva) je prechod látky z jednej fázy do druhej, medzi tieto zmeny patrí topenie, tuhnutie, vyparovanie, kondenzácia, sublimácia a desublimácia. Topenie je zmena tuhej látky na kvapalnú, opačný dej je tuhnutie, t. j. zmena kvapalnej látky na pevnú. Vyparovanie je zmena kvapalnej látky na plynnú. Kondenzácia je zmena plynnej látky na kvapalnú. Sublimácia je priama zmena tuhej látky na plynnú a opačný proces desublimácia, prechod z plynnej na tuhú látku.

Skupenské teplo L je teplo, ktoré treba dodať alebo teplo, ktoré sa uvoľní pri premene látky danej hmotnosti zohriatej na teplotu skupenskej premeny z jedného skupenstva na druhé rovnakej teploty. **Hmotnostné skupenské teplo** l je množstvo skupenského tepla prepočítaného na hmotnosť látky m

$$l = \frac{L}{m}$$

Jednotka hmotnostného skupenského tepla je $\mathrm{J.kg^{-1}}$. Podľa druhu skupenskej premeny je definované skupenské teplo topenia (tuhnutia) L_t, vyparovania (kondenzácie) L_v, sublimácie L_s. Hmotnostné skupenské teplo topenia, tuhnutia, vyparovania, kondenzácie, sú konštanty, ktorých hodnoty pre rôzne látky sú dostupné v tabuľkách. Napríklad teplo, ktoré je potrebné dodať tuhej látke ohriatej na teplotu topenia, aby sa premenila na kvapalnú látku tej istej teploty, sa nazýva skupenské teplo topenia. Teplo, ktoré sa dodáva tuhej látke pri teplote topenia, sa spotrebuje pri zmene skupenstva na prekonanie väzbových síl medzi molekulami. Až keď je celá látka roztopená, začne sa zvyšovať teplota látky dodávaným teplom.

Úlohy ku kapitole 8

1. Kyslík O_2 s látkovým množstvom $n = 0,2$ mol vyplnil nádobu s objemom $V = 2$ l. Relatívna atómová hmotnosť kyslíka $A_r = 16$, mólová hmotnosť $M_m = 32.10^{-3}$ kg.mol^{-1}. Vypočítajte hustotu kyslíka. *[ρ = 3,2* kg.m^{-3}*]*
2. V homogénnom tiažovom poli Zeme sme vystrelili rýchlosťou 300 m.s^{-1} kolmo nahor náboj z pušky. O koľko stupňov sa náboj zohrial pri dopade naspäť na zem, ak sa v náboji absorbovala polovica tepla, ktoré vzniklo pri náraze na zem? Hmotnostná tepelná kapacita materiálu náboja je 100 J.kg^{-1}.K^{-1} a odpor vzduchu počas letu náboja zanedbávame. *[Δt = 225*°C*]*
3. Určte tepelnú kapacitu telesa ak sa ohreje o 8 K dodaním tepla $Q = 240$ J. *[C = 30* J.K^{-1}*]*
4. Vo vani je 250 l vody, ktorá má teplotu 10°C. Koľko vody s teplotou 80°C je potrebné priliať do vane, aby mala voda vo vani teplotu 36°C? Hmotnostná tepelná kapacita vody je c = 4186 J.kg^{-1}.K^{-1}. *[V = 148* l*]*
5. Koľko tepla prijme voda v priehradnom jazere s objemom $V = 10^8$ l, ak sa zohreje z teploty 15°C na 20°C. Hmotnostná tepelná kapacita vody je c = 4186 J.kg^{-1}.K^{-1} a hustota vody je $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}. *[Q = 2,1.10^{12}* J*]*
6. Aby bolo možné udržať v miestnosti konštantnú teplotu vykurovaním, spotrebuje sa 4.10^6 J tepla za hodinu. Vypočítajte koľko vody pretečie radiátorom kúrenia za hodinu, ak pri vstupe do radiátora má voda teplotu $T_1 = 353,15$ K a pri výstupe teplotu $T_2 = 343,15$ K. Hmotnostná tepelná kapacita vody c = 4186 J.kg^{-1}.K^{-1}. *[V = 96* l*]*
7. Do kalorimetra nalejeme vodu s hmotnosťou 100 g a teplotou 21°C. Potom do kalorimetra pridáme vodu s teplotou 96°C a hmotnosťou 20 g. Nastane tepelná výmena medzi chladnejšou a teplejšou vodou a výsledná teplota vody sa ustáli na hodnote 33°C. Určte akú tepelnú kapacitu má kalorimeter s príslušenstvom. Hmotnostná tepelná kapacita vody je c = 4186 J.kg^{-1}.K^{-1}. *[C = 21* J.K^{-1}*]*
8. „Čierna“ káva urobená z presso stroja má hmotnosť 150 g, teplotu 90°C a pridáme do nej 50 g mlieka s teplotou 10°C. Určte, akú teplotu bude mať naša teraz „biela“ káva ak hmotnostnú tepelnú kapacitu kávy a mlieka považujme približne za rovnakú. *[t = 70*°C*]*
9. Koľko tepla je potrebné na pasterizovanie 100 kg mlieka, ktoré sa ohreje z teploty $T_1 = 283,15$ K na teplotu $T_2 = 353,15$ K, ak sa približne 1 % mlieka pri pasterizácii vyparí? Hmotnostná tepelná kapacita mlieka je c = $3,9.10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1}, hmotnostné skupenské teplo vyparovania mlieka je $l_v = 2303.10^3$ J.kg^{-1}. *[Q = 29,6.*10^6 J*]*
10. Päť litrov vody chceme ochladiť z 25°C na 10°C. Koľko ľadu s teplotou 0°C musíme pridať do vody? Hmotnostná tepelná kapacita vody je c = 4186 J.kg^{-1}.K^{-1} a hmotnostné skupenské teplo topenia ľadu je $l_t = 334.10^3$ J.kg^{-1}. *[m = 0,84* kg*]*

11. Vypočítajte množstvo tepla, ktoré je potrebné dodať vode s hmotnosťou 2 kg, teplotou 9°C, aby sa začala variť a aby sa počas varu vyparilo 0,2 kg vody. Hmotnostná tepelná kapacita vody c = 4186 $J.kg^{-1}.K^{-1}$, hmotnostné skupenské teplo varu vody je l_v = 2256.10^3 $J.kg^{-1}$. *[Q = 1,2* MJ*]*

12. Do 1,5 kg vody s teplotou 6°C sme pridali 0,12 g ľadu. Po ustálení sústavy a vyrovnaní teplôt sme z vody vybrali ľad. Vážením sme zistili, že ľad má o 12 g väčšiu hmotnosť. Určte pôvodnú teplotu ľadu. Hmotnostná tepelná kapacita vody je c = 4186 $J.kg^{-1}.K^{-1}$, hmotnostná tepelná kapacita ľadu je c = 2090 $J.kg^{-1}.K^{-1}$, hmotnostné skupenské teplo topenia ľadu je l_t = 334.10^3 $J.kg^{-1}$. *[t = -166* °C*]*

13. V elektrickej práčke sa ohrieva 28 l vody. Koľko tepla prijme voda, ak sa teplota vody zvýši z 15°C na 70°C? Aký čas je potrebný na ohrievanie vody, ak príkon výhrevného telesa práčky je 2 kW? *[Q = 6,5* MJ*, t = 53,7* min*]*

14. Stroj pracuje s výkonom *P* = 368 W a za 2 minúty vyvŕta otvor do bloku z liatiny, ktorý má hmotnosť *m* = 20 kg. O koľko kelvinov sa blok ohreje, keď 80 % práce konanej pri vŕtaní prispeje k zväčšeniu vnútornej energie bloku? Hmotnostná tepelná kapacita liatiny je *c* = 544,2 $J.kg^{-1}.K^{-1}$. *[*ΔT = *3,25* K*]*

15. V stroji na sústruženie je potrebné chladenie obrábanej súčiastky aj obrábacej časti stroja, pretože vplyvom trenia sa tieto časti zahrievajú. Tepelný výkon, ktorým sa zohrieva chladiaca kvapalina je 50 $kJ.min^{-1}$. Hustota kvapaliny je 980 $kg.m^{-3}$, hmotnostná tepelná kapacita 3900 $J.kg^{-1}.K^{-1}$, začiatočná teplota je 20°C a konečná teplota nesmie presiahnuť 60°C. Vypočítajte koľko litrov chladiacej kvapaliny je potrebné na hodinu sústruženia. *[V = 19,6* l*]*

16. Plyn s objemom 285 l pri konštantnom tlaku zohrejeme o 100°C. Aký bude objem plynu po zohriatí? *[V = 390* l*]*

17. Nech tlak vzduchu v pneumatikách osobného auta pri teplote T_1 = 300 K je p_1 = 170 kPa. Pri jazde auta sa v dôsledku trenia pneumatík o vozovku zvyšuje aj teplota vzduchu v pneumatikách na T_2 = 320 K. O koľko sa zvýši tlak v pneumatike pri jazde autom, ak pokladáme vzduch v pneumatike za ideálny plyn? *[Δp = 11,3 k*Pa*]*

18. Tlak v pneumatikách automobilov je definovaný výrobcom a je okolo 230 kPa, pričom pri rýchlostných automobiloch sa pneumatiky hustia na nižší tlak. S akou zmenou teploty sa uvažuje, ak má vzduch pri teplote 20°C tlak v pneumatike 200 kPa? *[ΔT = 44* K*]*

19. Vypočítajte prácu, ktorú vykoná plyn, ak sa pôvodný objem plynu V_0 = 1 cm^3 zväčší na štvornásobok pri konštantnom tlaku p = 10^8 Pa. *[W = 300* J*]*

20. Vzduch má pri normálnom tlaku a teplote t_0 = 0°C hustotu ρ_0 = 1,3 $kg.m^{-3}$. Ak zvýšime teplotu vzduchu na 35°C pri normálnom tlaku, akú bude mať vzduch hustotu? *[ρ = 1,15* $kg.m^{-3}$*]*

21. Vypočítajte, akú hmotnosť má vzduch v miestnosti pri tlaku 101,1 . 10^3 Pa a pri izbovej teplote 20°C. Miestnosť je 5m široká, 7 m dlhá a 2,5 m vysoká. Hustota vzduchu za normálnych podmienok pri teplote 0°C je ρ = 1,3 kg.m^{-3}. *[m = 106* kg*]*

22. V nádobe, ktorá má objem V = 10^{-2} dm^3 je pod tlakom p = 15 GPa dusík s hmotnosťou m = 1,68 kg. Určte teplotu dusíka, pričom za udaných podmienok ho považujeme za ideálny plyn. Mólová hmotnosť dusíka je M_m = 28 g.mol^{-1}, R_m = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}. *[T = 301* K*]*

23. Vypočítajte hmotnosť kyslíka v oceľovej fľaši dýchacieho prístroja s objemom 3 l, ak je plyn pod tlakom 2.10^7 Pa a má teplotu 293,15 K. Molová hmotnosť kyslíka je M_m = 32 g.mol^{-1}, R_m = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}. *[m = 0,788* kg*]*

24. Bomba obsahuje stlačený plyn pod tlakom 4 MPa pri teplote 293,15 K. Polovicu hmotnosti plynu vypustíme a jeho teplota po vypustení klesne na 283,15 K. Na akú hodnotu klesne tlak plynu? *[p_2 = 2* MPa*]*

25. Vzduchová bublina s polomerom r_1 = 5,0 mm stúpa zo dna jazera hlbokého h = 21 m. Teplota pri dne jazera je t_1 = 4°C a pri hladine t_2 = 24°C. Aký bude polomer bubliny keď vypláva ku hladine? Uvažujme atmosférický tlak s hodnotou p_a = 10^5 Pa a hustotu vody ρ = 10^3 kg.m^{-3}. *[r_2 = 7,4.10^{-3}* m*]*

26. Určte zmenu tlaku vzduchu v automobilovej pneumatike, ktorá je naplnená plynom pod tlakom 250 kPa, ak sa počas jazdy teplota pneumatiky zmení zo 17°C na 77°C. Vnútorný objem pneumatiky ostáva konštantný. *[Δp = 52* kPa*]*

27. Akú bude mať účinnosť ideálny tepelný stroj a aké množstvo tepla musí odobrať z ohrievača, ak má vykonať prácu W = 2550 J? Stroj pracuje v teplotnom intervale od 30°C do 550°C. *[η = 63,2 %, Q = 4035* J*]*

28. Určte najmenší možný výkon stroja, ktorý má odoberať vode stálej teploty t_1 = 17°C teplo Q = 41,9.10^3 J za jednu sekundu a dodávať ho do tepelného radiátora teploty t_2 = 46°C. Koľko tepla sa odovzdá vonkajšiemu zásobníku? *[P = 4190* W*, Q = 46,08* kJ*]*

29. Počas jedného cyklu plyn prijal od ohrievača teplo Q_1 = 10^7 J, odovzdal chladiču teplo Q_2 = 1,5.10^6 J. Určte prácu plynu počas tohto cyklu a účinnosť cyklu. *[W = 8,5.10^6* J*, η = 0,85]*

9. Základy elektriny

9.1. Elektrické pole

V okolí elektricky nabitých telies alebo častíc existuje elektrické pole. Tak ako gravitačné pole a iné druhy polí aj elektrické pole je formou hmoty. Zdrojom elektrického poľa sú častice s nábojom. Pojem elektrický náboj vyjadruje určitý stav elektricky nabitých telies alebo charakterizuje fyzikálnu veličinu, ktorá je mierou tohto stavu.

Elementárny náboj je najmenší elektrický náboj. Hodnota elementárneho náboja je rovná náboju elektrónu $e = 1{,}602.10^{-19}\ \mathrm{C}$ so záporným znamienkom a pokojová hmotnosť elektrónu je rovná $m_e = 9{,}109.10^{-31}\ \mathrm{kg}$. Nosiče elementárneho náboja sú protóny a neutróny. Protón je kladný, jeho náboj je rovnaký ako náboj elektrónu a pokojová hmotnosť protónu je $m_p = 1{,}7.10^{-27}\ \mathrm{kg}$. Neutrón je elektricky neutrálna častica.

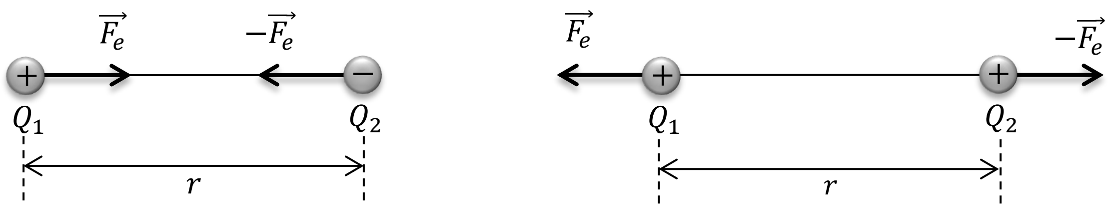
Coulombov zákon

Dva bodové náboje Q_1, Q_2, ktoré sú v inerciálnej vzťažnej sústave v pokoji, na seba navzájom pôsobia elektrickými silami rovnakej veľkosti, ktoré sú opačne orientované. Veľkosť a smer elektrickej sily definuje **Coulombov zákon** nasledovne

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

kde r je vzdialenosť nábojov, ε je **permitivita prostredia**, v ktorom sa náboja nachádzajú. Permitivita prostredia závisí od permitivity vákua $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4}$ a relatívnej permitivity prostredia ε_r, ($\varepsilon_r = 1$ pre vákuum), pričom pre permitivitu platí $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$. Jednotka elektrického náboja Q je coulomb (C), $1\ C\ =\ 1\ A.s$.

Vektor elektrickej sily $\boldsymbol{F}_e$ leží na spojnici nábojov Q_1, Q_2. Ak sú náboje nesúhlasné, má vektor sily smer od náboja Q_2 k náboju Q_1, $Q_1Q_2 < 0$, sila je príťažlivá. Ak sú náboje súhlasné, má vektor sily opačný smer, $Q_1Q_2 > 0$, sila je odpudivá (obr. 9.1).



Obr. 9.1. Vzájomné silové pôsobenie medzi elektrickými nábojmi

Intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ je vektorová fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje elektrické pole okolo každého elektricky nabitého telesa. Je určená podielom sily $\boldsymbol{F}_e$ pôsobiacej v danom mieste poľa na kladný bodový náboj $Q^{´}$ a veľkosti tohto náboja

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_e}{Q^{´}}$$

Jednotkou intenzity elektrického poľa je $\mathrm{N.C^{-1}} = \mathrm{kg.m.s^{-3}.A^{-1}}$. Smer vektora intenzity je rovnaký ako smer sily. Dosadením za silu vyjadrenú z Coulombovho zákona je možné vyjadriť veľkosť intenzity elektrického poľa vo vzdialenosti r od bodového náboja Q nasledovne

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$$

V okolí bodových nábojov je **radiálne elektrické pole**. Ak pole vytvára kladný náboj, intenzita má smer polpriamky vychádzajúcej z náboja, ak pole vytvára záporný náboj, polpriamka vstupuje do náboja. V prípade, že elektrické pole je vytvorené niekoľkými zdrojmi, niekoľkými nábojmi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ výsledná intenzita elektrického poľa je určená vektorovým súčtom intenzít elektrických polí $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n$.

Rozmiestnenie elektrického náboja na vodiči charakterizuje fyzikálna veličina **plošná hustota náboja** σ. Definovaná je podielom celkového náboja Q rovnomerne rozmiestneného na povrchu vodiča s plochou S , na ktorom je náboj rozmiestnený

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Jednotkou plošnej hustoty náboja σ je $\mathrm{C.m^{-2}} = \mathrm{A.s.m^{-2}}$.

Elektrická potenciálna energia E_p náboja Q v danom mieste poľa je rovná práci W, ktorú vykoná elektrická sila $\boldsymbol{F}_e$ pri premiestnení náboja z daného miesta na povrch Zeme, t. j. $E_p = W$. Podiel elektrickej potenciálnej energie kladného elektrického náboja Q v danom mieste poľa, respektíve práce a veľkosti tohto náboja definuje fyzikálnu veličinu **elektrický potenciál** φ_e

$$\varphi_e = \frac{W}{Q}$$

Absolútna hodnota rozdielu potenciálov dvoch bodov elektrického poľa určuje **elektrické napätie** U medzi týmito bodmi

$$U = \left|\varphi_{e_1} - \varphi_{e_2}\right|$$

Jednotkou elektrického potenciálu je volt (V), $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J.C^{-1}} = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}}$.

Pôsobením sily $\boldsymbol{F}_e = Q\boldsymbol{E}$ na kladný elektrický náboj Q nachádzajúci sa v homogénnom elektrickom poli, prejde náboj Q v smere intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ dráhu d. Elektrické pole prenesením elektrického náboja vykoná prácu

$$W = F_e d = QEd = QU$$

Podiel práce W a náboja Q určuje napätie medzi dvoma bodmi homogénneho elektrického poľa vzdialených d nasledovne

$$U = \frac{W}{Q} = Ed$$

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{U}{d}$$

Podielom náboja Q privedeného na izolovaný vodič a potenciálu daného vodiča je definovaná fyzikálna veličina **kapacita vodiča** C

$$C = \frac{Q}{\varphi_e}$$

Jednotkou kapacity C je farad (F), $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C.V^{-1}} = 1\,\mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-2}.s^4}$. Sústava dvoch navzájom izolovaných vodičov sa nazýva **kondenzátor**. Kapacita kondenzátora, kde U je rozdiel potenciálov nabitých vodičov kondenzátora je definovaná vzťahom

$$C = \frac{Q}{U}$$

Kapacita vodiča tvaru gule s polomerom R je definovaná $C = 4\pi\varepsilon R$. Kapacita platňového kondenzátora tvoreného dvoma rovnobežnými navzájom izolovanými platňami je definovaná $C = \frac{\varepsilon S}{d}$, kde ε je permitivita dielektrika nachádzajúceho sa medzi platňami, d je vzdialenosť platní a S je plošný obsah platne.

Energia elektrického poľa kondenzátora s kapacitou C nabitého nábojom Q je určená vzťahmi

$$E_e = \frac{1}{2}QU$$

$$E_e = \frac{1}{2}CU^2$$

Kondenzátory sa spájajú paralelne alebo sériovo. Pri **paralelnom zapojení** kondenzátorov s kapacitami $C_1, C_2, \dots C_n$ sa celkový náboj rozdeľuje na jednotlivé kondenzátory a platí $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$. Napätie je na všetkých kondenzátoroch rovnaké, teda možno napísať, že $Q = UC_1 + UC_2 + \cdots + UC_n$ a výsledná kapacita kondenzátorov zapojených paralelne narastá

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Pri **sériovom zapojení** kondenzátorov je náboj na všetkých kondenzátoroch rovnaký. Celkové napätie je určené ako $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ a po dosadení za hodnoty napätí pre jednotlivé kondenzátory platí $U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$. To znamená, že pri sériovom zapojení kondenzátorov výsledná kapacita klesá podľa vzťahu

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

9.2. Elektrický prúd

Elektrický prúd je usporiadaný pohyb elektricky nabitých častíc. Veľkosť celkového náboja častíc ΔQ, ktoré pretečú prierezom vodiča jedným smerom za čas Δt, definuje fyzikálnu veličinu **elektrický prúd** I vzťahom

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Jednotkou elektrického prúdu je ampér (A). Ampér A patrí medzi základné jednotky sústavy SI.

Pre elektrický prúd v kovoch platí **Ohmov zákon**:

Elektrický prúd I v kovovom vodiči je priamo úmerný elektrickému napätiu U medzi koncami vodiča

$$I = \frac{U}{R}$$

Veličina R sa nazýva **elektrický odpor** v tej časti obvodu, na ktorej je napätie U. Jednotkou elektrického odporu je ohm (Ω), $1\Omega = 1\,\mathrm{V.A^{-1}} = 1\,\mathrm{kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}}$. Fyzikálna veličina **elektrická vodivosť** G je schopnosť vodiča viesť elektrický prúd a je definovaná ako prevrátená hodnota odporu R

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

Jednotka elektrickej vodivosti je siemens (S), $1\,\mathrm{S} = 1\,\mathrm{A.V^{-1}} = 1\,\mathrm{kg^{-1}.m^{-2}.s^3.A^2}$.

Ohmov zákon pre uzavretý elektrický obvod má tvar

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}$$

I je prúd prechádzajúci uzavretým obvodom, U_e **elektromotorické napätie** zdroja, je napätie na svorkách nezaťaženého zdroja, R je odpor vo vonkajšej časti obvodu, R_i vnútorný odpor zdroja. Pre **svorkové napätie** zdroja U platí

$$U = U_e - R_i I = RI$$

kde $U_i = R_i I$ je úbytok napätia na vnútornom odpore zdroja a je možné ho zanedbať, ak je $R \gg R_i$.

Elektrický odpor závisí od geometrického tvaru vodiča a od materiálu, z ktorého je vodič vyrobený a platí vzťah

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

S je obsah kolmého prierezu vodiča, l je dĺžka vodiča a ρ je **merný elektrický odpor látky**, z ktorej je vodič zhotovený. Jednotkou ρ je $\Omega.\mathrm{m}$, $1\ \Omega.\mathrm{m} = 1\ \mathrm{kg.m^3.s^{-3}.A^{-2}}$. Elektrický odpor kovového vodiča závisí aj od teploty v obmedzenom teplotnom intervale podľa vzťahu

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$$

R_0 je odpor pri teplote T_0 a R je odpor pri teplote T, pričom $\Delta T = T - T_0$, α je **teplotný súčiniteľ elektrického odporu** a jeho jednotka je $\mathrm{K^{-1}}$.

Kirchhoffove zákony

Výsledný odpor dvoch rezistorov s odpormi R_1, R_2 pri sériovom zapojení je definovaný vzťahom $R = R_1 + R_2$ a pri paralenom zapojení $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Elektrické obvody s rôznymi spôsobmi zapojenia rezistorov a zdroje elektromotorického napätia tvoria elektrickú sieť. Pri takýchto zložitejších elektrických obvodoch sa aplikujú Kirchhoffove zákony. Miesto v rozvetvenom elektrickom obvode, v ktorom sa stretnú aspoň tri vodiče sa nazýva uzol elektrického obvodu. Pre uzol jednosmerného elektrického obvodu platí **I. Kirchhoffov zákon**:

Algebraický súčet prúdov v uzle sa rovná nule, kde n je počet vodičov stretávajúcich sa v uzle, kladné znamienko majú prúdy vstupujúce do uzla a záporné znamienko z uzla vystupujúce

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Rozvetvený elektrický obvod sa delí na jednotlivé uzavreté obvody, tzv. slučky, pre ktoré platí **II. Kirchhoffov zákon**:

V jednoduchom uzavretom elektrickom obvode sa súčet elektromotorických napätí U_{e_i} zdrojov zaradených do obvodu rovná súčtu úbytkov napätí zapojených rezistoroch $R_k I_k$

$$\sum_{i=1}^{m} U_{e_i} = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k$$

kde m je počet zdrojov v obvode a n je počet ohmických úbytkov napätí.

Pre prácu ustáleného elektrického prúdu platí $W = UI\Delta t$, kde Δt je čas, za ktorý sa práca konala. Potom výkon ustáleného prúdu je definovaný vzťahom $P = UI$.

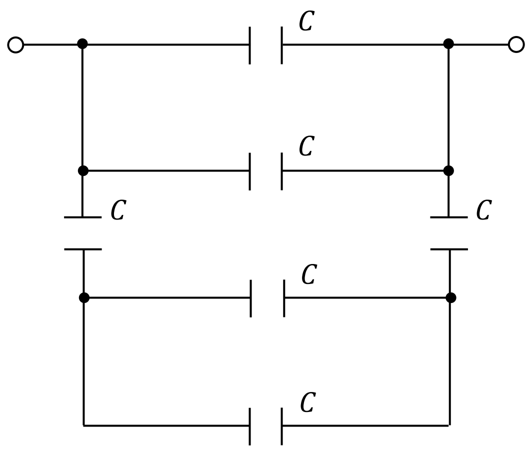
Úlohy ku kapitole 9

1. Planéta Zem predstavuje nabitú vodivú guľu so záporným elektrickým nábojom $Q = 0{,}58$ C. Aká je plošná hustota náboja na povrchu Zeme? Stredný polomer Zeme je $R_Z = 6371$ km. [$\sigma = 1{,}14.10^{-15}$ C.m^{-2}]
2. Máme dve rovnaké guľôčky s hmotnosťami 15 g. Určte veľkosť nábojov, ktoré by sme mali dať na guľôčky, aby elektrostatické sily, ktorými budú na seba pôsobiť, boli vykompenzované gravitačnými silami, ktorými na seba guľôčky pôsobia. [$Q = 1{,}29.10^{-12}$ C]
3. Vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a sa nachádzajú náboje $Q = 1{,}73.10^{-8}$ C. Aký náboj je vhodné umiestniť do ťažiska trojuholníka, aby bola výsledná sila pôsobiaca na náboje vo vrcholoch nulová? [$Q_T = 1.10^{-8}$ C]
4. Bodové náboje $Q_1 = 3.10^{-8}$ C a $Q_2 = 9.10^{-8}$ C sú umiestnené vo vákuu vo vzdialenosti 15 cm. Vypočítajte, v ktorom mieste na ich spojnici bude intenzita elektrického poľa rovná nule. [$x_1 = 0{,}055$ m]
5. Protón s nulovou začiatočnou rýchlosťou je pod účinkom homogénneho elektrického poľa s neznámou intenzitou elektrického poľa E. Pohybom v smere siločiar protón na dráhe 20 cm nadobudne rýchlosť 3.10^6 m.s^{-1}. Určte veľkosť intenzity elektrického poľa a potenciálový rozdiel, ktorý počas pohybu protón prekonal. Hmotnosť protónu je $m_p = 1{,}673.10^{-27}$ kg, náboj protónu $e = 1{,}602.10^{-19}$ C. [$E = 2{,}349.10^5$ V.m^{-1}, $U = 4{,}699.10^4$ V]
6. Častica má hmotnosť $m = 10^{-6}$ g a je nabitá nábojom $Q = 10^{-7}$ C. Určte veľkosť rýchlosti, ktorú nadobudne častica na dráhe s = 20 cm v homogénnom elektrostatickom poli s intenzitou veľkosti $E = 10^4$ V.m^{-1}. [$v = 6{,}32.10^2$ m.s^{-1}]
7. Pri prenesení náboja z jedného izolovaného vodiča na druhý bola vykonaná práca $W = 9.10^{-5}$ J. Vzhľadom na Zem je hodnota potenciálov obidvoch vodičov $\varphi_1 = -20$ V a $\varphi_2 = 60$ V. Určte veľkosť náboja, ktorý bol medzi vodičmi prenesený. [$Q = 1{,}125 .10^{-6}$ C]
8. Elektrón je umiestnený v homogénnom elektrickom poli s intenzitou veľkosti 12 V.m^{-1}.
   a) Určte zrýchlenie elektrónu, v prípade, že začiatočná rýchlosť bola nulová.
   b) Určte kinetickú energiu elektrónu v čase 10^{-5} s.
   c) Vypočítajte potenciálový rozdiel, ktorým elektrón prejde za čas 10^{-5} s.
   Náboju elektrónu je $e = 1{,}602.10^{-19}$ C a jeho hmotnosť $m_e = 9{,}109.10^{-31}$ kg.
   [a) $a = 2{,}110.10^{12}$ m.s^{-2}, b) $E_k = 2{,}028.10^{-16}$ J, c) $U = 1{,}266$ kV]
9. Určte prácu potrebnú na prenesenie kladného elektrického náboja Q = 1 C zo záporného pólu na kladný pól vreckovej batérie s napätím U = 4,5 V. Akú prácu by vykonalo elektrické pole batérie, keby sa náboj vrátil prostredníctvom vodiča a žiarovky na záporný pól batérie? [$W = 4{,}5$ J, rovnakú prácu]

10. Medzi búrkovými mrakmi a Zemou v okamihu vzniku blesku dosiahlo napätie hodnotu 10^9 V. Náboj búrkového mraku bol 10 C. Aká veľká elektrická energia sa uvoľnila pri blesku? *[E_e = 5.10^9* J*]*

11. Dielektrikum medzi platňami kondenzátora je zložené z vrstvy vzduchu s hrúbkou d_1 = 0,4 mm a vrstvy plexiskla s hrúbkou d_2 = 2 mm. Vypočítajte kapacitu kondenzátora. Plocha jednej platne je S = 2 dm^2, relatívna permitivita plexiskla ε_r = 3,4. *[C = 179.10^{-8}* F*]*

12. Určte výslednú kapacitu sústavy kondenzátorov s kapacitou jedného kondenzátora *C* = 2 μF, ktoré sú zapojené podľa schémy na obr. 9.2. *[C_v = 4,8* μF*]*



Obr. 9.2. Schéma zapojenia kondenzátorov

13. Určte napätie medzi bodmi medeného drôtu, ktoré sú vo vzdialenosti 0,7 m. Drôtom prechádza prúd 6 A, priemer drôtu je 1 mm a merný elektrický odpor medi je ρ = 1,75.10^{-8} Ω.m. *[U = 0,094* V*]*

Literatúra

BARTUŠKA, K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I.*, 2. upavené vydání, Prometheus, 1997, s.180.

BARTUŠKA, K.: *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II.*, 1. vydání, Prometheus, 1997, s.158.

BURY, P. - PUDIŠ, D. - MARTINČEK, I. - TRPIŠOVÁ, B. - JUREČKA, S. - KÚDELČÍK, J.: *Fyzika I*, 1. vydanie, EDIS, 2013, s. 286.

FEYNMAN, R. P. - LEIGHTON, R. B. - SANDS M.: *Feynmanovy přědnášky z fyziky s rěšenými příklady 1/3*, česká verze 1. vydání, Fragment, 2000, s. 732.

HAJKO, V.: *Fyzika v príkladoch*, 4. vyd. Bratislava: ALFA, 1971. 480 s.

HAJKO, V. – SZABÓ J. D.: Základy fyziky, 1. vydanie, VEDA, Bratislava, 1980, s. 576

HALLIDAY, D. - RESNICK, R. - WALKER, J.: *Fyzika*, VUTIUM, 2007.

HANZELÍK, F. a kol.: *Zbierka riešených úloh z fyziky pre uchádzačov o štúdium na vysokých školách technických*, 1. vydanie, Alfa, Bratislava, 1989, s. 480.

HOCKICKO, P.: *Fyzikálna videoanalýza reálnych dejov*, 1. vydanie, EDIS, Žilina, 2015, 195 s.

JACKULIAK, Q. – BAJÁK, J. – VAJDA, O. – HOCKICKO, P.: *Zbierka úloh z fyziky I*, 1. vydanie, EDIS, Žilina, 2002, 134 s.

JACKULIAK, Q. – ŽUCHA, V. – TARJÁNYIOVÁ, G. - HOCKICKO, P. – VAJDA, D.: *Zbierka úloh z fyziky II*, 1. vydanie, EDIS, Žilina, 2006, 261 s.

KÚDELČÍK, J. – HOCKICKO, P.: *Základy fyziky*, prvé vydanie, EDIS, Žilina, 2011, 272 s.

LEPIL, O. a kol.: *Fyzika, Sbírka úloh pro stredni školy*, 2. vydání, Prometheus, 1995, s. 269.

SVOBODA, E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky*, 3. vydání, Prometheus, 1996, s. 500.

TOMANOVÁ, E. - BANÍK, I. - BARTUŠKA, K. - KOUBEK, V. - RAKOVSKÁ, M. - VOLF, I.: *Zbierka úloh z fyziky pre gymnázium I. časť*, 1. Vydanie, SPN, 1987, s 256.

ZÁMEČNÍK, J.: *Prehľad stredoškolskej fyziky k maturite a na prijímacie skúšky*, 1. Vydanie, SPN, 1995, s. 231.

Resolution 1 of the 26th CGPM (2018). Dostupné online: https://www.bipm.org/en/CGPM/db/26/1/ [cit. 2020-09-08].

https://www.bipm.org/utils/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf [cit. 2020-06-16].

https://www.priklady.eu [cit. 2020-09-08].

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD.

Názov **ÚVOD DO FYZIKY**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS – vydavateľskom centre ŽU v roku 2020
ako svoju 4663. publikáciu

Vydanie prvé
Náklad 100 USB
AH/VH 6,76/7,15
ISBN 978-80-554-1741-7

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk